بحوث العمليات

مع تطبيقات باستخدام الحاسوب

فتحي خليل حمدان

جامعة البترا



الطبعة الأولى

2010

بحــوث العمليات

مع تطبيقات باستخدام الحاسوب

فتحي خليل حمدان

جامعة البترا

دار وائل للنشر

الطبعة الأولى

2009

رقم الايداع لدى دائرة المكتبة الوطنية : (2009/2/679)
حمدان، فتحي خليل
بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب/ فتحي خليل حمدان
عمان: دار وائل للنشر، 2009.
(466) ص
ر.إ. : (2009/2/679)
الواصفات: /بحوث العمليات// اتخاذ القرارات// الحواسيب/ إدارة الأعمال/
* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

****

رقم التصنيف العشري / ديوي : 657.403
ISBN 978-9957-11-801-3 (ردمك)

* بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب
* فتحي خليل حمدان
* الطبعة الأولى 2009



دار وائــل للنشر والتوزيع
* الأردن - عمان - شارع الجمعية العلمية الملكية - مبنى الجامعة الاردنية الاستثماري رقم (2) الطابق الثاني
هـاتف : 00962-6-5338410 - فاكس : 00962-6-5331661 - ص. ب (1615 - الجبيهة)
* الأردن - عمـان - وسـط البـلد - مجمـع الفحيص التجـاري- هــاتف: 00962-6-4627627
www.darwael.com
E-Mail: Wael@Darwael.Com

قال تعالـى :

﴿ نور على نور يهدي الله لنوره من يشاء ﴾

صدق الله العظيم

المحتويات

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

الموضوع	الصفحة

المقدمــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على اشرف المرسلين رسوله الأمين سيدنا محمد عليه الصلاة والسلام وعلى آله وصحبه وتابعيهم ومن تبعهم إلى يوم الدين.

أما بعـد ،،

هذا الكتاب في بحوث العمليات وتطبيقاتها في الحاسوب يتعرض لمواضيع رئيسية في بحوث العمليات واضفت له بعض التطبيقات في الحاسوب باستخدام برمجية إكسل المعروفة من ويندوز بالإضافة إلى استخدام أحد التطبيقات الكثيرة في بحوث العمليات وهي برمجية تورا (TORA) وقد أخذت هذه البرمجية من كتاب الدكتور حمدي طه Operation research an introduction ولعل هذا الاقتباس يكون مفيداً لقارئ هذا الكتاب.

يتعرض هذا الكتاب كما اسلفنا إلى مواضيع رئيسية متنوعة في بحوث العمليات حيث يتكون من إحدى عشر وحدة، فالوحدة الأولى وهي الوحدة الرئيسية في المادة البرمجة الخطية وبحوث العمليات والتي اتحدث فيها عن تاريخ بحوث العمليات بالإضافة إلى تكوين نموذج البرمجة الخطية وطرق حله بطريقة الرسم البياني والمبسطة وبعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية، أما الوحدة الثانية فهي مقسومة إلى قسمين، القسم الأول يتحدث عن تحليل الحساسية والقسم الثاني يتحدث عن النموذج المقابل. أما الوحدة الثالثة فنعرض فيها البرمجة الصحيحة والرابعة تتخصص بنموذج النقل وطرق حله ونموذج التخصيص أو التعيين وطرق حله. والوحدة الخامسة تتحدث عن شبكات الأعمال وشبكة بيرت. أما الوحدة السادسة فهي تتعرض لنظرية اتخاذ القرار وهي من النظريات المهمة في بحوث العمليات، والوحدة السابعة نظرية أخرى مهمة هي نظرية الالعاب . أما الوحدة الثامنة فهي تعرض نظرية من النظريات الحديثة في بحوث العمليات هي نظرية

صفوف الانتظار ، والوحدة التاسعة تشرح سلاسل ماركوف، والوحدة العاشرة تتحـدث بايجـاز عـن نمـاذج المخزون، أما الوحدة الأخيرة فهي تتحدث نوعاً ما عن المحاكاة وهي أيضاً من المواضيع العلمية المهمة.

وأخيراً وليس آخراً اشكر كل من ساهم في إخراج هذا الكتـاب، وأتمنـى عـلى كـل مـن يقـرأ هـذا الكتاب وله ملاحظات عليه أن يرسل بملاحظاته إلى دار وائل للنشر والتوزيع.

والله الموفـــق ،،

فتحي حمدان
2009

الوحدة الأولى

البرمجة الخطية وبحوث العمليات

Linear Programming and Operation Research

الوحدة الأولى

البرمجة الخطية وبحوث العمليات

Linear Programming and Operation Research

مفهوم بحوث العمليات

هناك عدة تعاريف لبحوث العمليات فهي بإختصار تطبيق الطرق العلمية والعملية لحل المشاكل المعقدة التي تواجه الإدارات العسكرية (الصناعية التجارية، الإدارية، الهندسية..... الخ).

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة والتنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم وبالتالي إتخاذ القرارات المناسبة والسليمة.

من أبرز التعاريف التي يعتمد عليها معظم الإختصاصيين في بحوث العمليات التعريف الذي إعتمدته جمعية بحوث العمليات البريطانية فعرفته على أنه "إستخدام الأساليب العلمية لحل المشاكل المعقدة في إدارة الأنظمة الكبيرة من المعدات، المواد الأولية، القوى العاملة، الأموال، والأمور الخدمية الأخرى في المؤسسات والمصانع العسكرية والمدنية".

اما جمعية بحوث العمليات الأمريكية فقدمت تعريفاً مشابهاً للتعريف السابق إلا أنه كان تعريفاً مختصراً حيث عرفت بحوث العمليات على أنها "تهتم باتخاذ القرارات العلمية لتصميم ووضع أنظمة المعدات والقوى العاملة وفقاً لشروط معينة تتطلب تخصيص الموارد المحدودة بشكل أمثل".

إن التعريفين السابقين يركزان على النواحي الأساسية الآتية:

1. أن بحوث العمليات تستخدم الطريقة العلمية كأساس ومنهج في البحث والدراسة.

2. أن جوهر بحوث العمليات هو بناء النماذج والإعتماد عليها.

3. إن الهدف من بحوث العمليات هو مساعدة الإدارة في اتخاذ القرارات المتعلقة بالمشكلات الإدارية الصعبة والمعقدة.

التطور التاريخي لبحوث العمليات:

تعتبر بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي أحرزت تطبيقاتها نجاحاً واسعاً في مختلف مجالات الحياة.

نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية حيث عهدت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء والباحثين مهمة دراسة المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية الخاصة بالدفاع البري والجوي عن الدولة.

ولقد كان هدف ذلك الفريق هو تحديد أفضل إستخدام ممكن للموارد الحربية المحدودة بالإضافة إلى دراسة طريقة استخدام الرادار الذي كان قد إكتشف حديثاً في ذلك الوقت وكذلك دراسة فاعلية الأنواع الجديدة من قاذفات القنابل.

يعتبر تشكيل هذه المجموعة أول بادرة لنشوء ما يسمى ببحوث العمليات Operations Research مطلع عام 1941، إتسع تطبيق بحوث العمليات ليشمل جميع قوات الحلفاء ذلك بسبب النجاح الذي أحرزته الإدارة العسكرية البريطانية في إنزال أقصى الضربات بالقوات المعادية.

إن النتائج المشجعة التي توصل إليها فريق العمل الإنجليزي أدت وبعد فترة قصيرة من الزمن إلى قيام السلطات العسكرية الأمريكية بتكوين فريق مماثل بهدف معالجة المشاكل المعقدة بنقل المعدات والمؤن والذخائر الحربية للقوات الأمريكية والتي إنتشرت أثناء الحرب العالمية الثانية في أرجاء متعددة من العالم.

كما وقامت الحكومة الكندية بتكوين فريق مماثل للفريق الأمريكي أثناء الحرب العالمية الثانية مهمته إنتاج بعض المعدات العسكرية وذلك من خلال الإستخدام الأمثل للموارد المتاحة.

يرجـــع الســـبب في تكـــوين "فريـــق" بحـــوث عمليـــات بـــدلاً مـــن الإعـــتماد عـــلى الفرد الواحد إلى أن كثير من المشاكل الإستراتيجية والتكتيكية المرتبطة بـالنواحي العسـكرية معقـدة جـداً لدرجـة يتعذر معها على الفرد الواحد الوصول إلى حلول فرضية، ولذلك كان يتم تشكيل فريـق لبحـوث العمليـات يتكـون من عدد من العلماء ذو تأهيل علمي متنوع.

ربما يرجع نجاح فرق بحوث العمليات في ذلك الوقت إلى تشكيل تلك الفرق مـن أفـراد موهـوبين ذوي إختصاصات مختلفة بالإضاف إلى ضغوط فترة الحرب واستخدام أساليب مختلفة.

وبعد الحرب إتجه كثير من العلماء الذين كانوا يعملون في فرق بحوث العمليات –والتي كانت مهمتهم بالنواحي العسكرية- إلى استخدام أساليب بحوث العمليات في الأغراض المدنيـة، فقـد عـاد بعضـهم إلى الجامعـات وركزوا جهودهم من أجل تأصيل الأساليب التي سبق إكتشافها، في حين ركز الـبعض الآخـر عـلى إكتشـاف أسـاليب جديدة. كما ركز آخرون على تطبيق أساليب بحوث العمليات في قطاعات ومجالات إقتصادية مختلفة.

إن بحوث العمليات تستخدم الآن في مجالات عديـدة بالإضـافة إلى المجـال الصـناعي والعسـكري، فقـد إتســـــع اســـــتخدامها ليشـــــمل مجـــــالات أخـــــرى مثـــــل البنـــــوك والمستشفيات والمكتبات والفنادق وتخطيط المدن وتخطيط نظم النقل التي سنشرحها بالتفصيل لاحقاً.

العوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات.

1. الرواج الإقتصادي الذي أعقب الحرب العالمية الثانية وما صاحب ذلك من الإتساع في إستخدام المكننة والوسائل الآلية وتقسيم العمل وتفويض السلطات الأمر الذي أدى إلى ظهور الكثير من المشكلات الإدارية المعقدة مما دفع بعض العلماء والباحثين إلى دراسة تلك المشكلات وإيجاد أفضل الحلول لها باستخدام أساليب بحوث العمليات.
2. ظهور الحاسب الإليكتروني (Computer) وتطوره السريع كان عاملاً أساسياً في إزدهار بحوث العمليات والتوسع في استخدامها، حيث أن النماذج الرياضية التي تتناولها بحوث العمليات قد تكون غالباً نماذج معقدة تتضمن عمليات حسابية كبيرة ومتشابكة الأمر الذي يتعذر معه حلها يدوياً. ولذلك نجد أن الحاسب الإلكتروني يساعد في حل هذه النماذج في وقت قصير وبدقة.
3. إستمرار كثير من الباحثين في بحوثهم، وقد أدى ذلك إلى إبتكار الكثير من أساليب بحوث العمليات حيث إبتكر جورج دانتزج Gearge Dantzig طريقة السمبلكس لحل نموذج البرمجة الخطية في عام 1947 نتيجة استمراره في البحث.

مجالات بحوث العمليات :

كما ذكرنا سالفاً بعد الحرب العالمية الثانية استخدم بحوث العمليات في النواحي الادارية في نواحي عديدة منها :

1- الادارة الصناعية :

حين تتعامل المصانع مع الانتاج فهناك مشكلتان تظهران وهما إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكلفة ولحل هاتان المشكلتان نستخدم الأساليب الكمية في الحل ويتم تطبيق بحوث العمليات أيضاً في تحديد كمية الانتاج وزيادة الطاقة الانتاجية والسيطرة على المخزون.

2- الادارة العسكرية :

تستخدم بحوث العمليات في هذه الناحية بحيث تحدد افضل الطرق للنقل بأقل الخسائر الممكنة وايضاً وضع التكتيك الدفاعي الذي يعتمد على أسلوب البرمجة الخطية.

3- الادارة الزراعية :

تستخدم في التوزيع الأمثل للمياه على الأراضي الزراعية ومساعدة البلدان التي تقل فيها الموارد المائية في السيطرة على المخزون المائي وتوزيعه بشكل أفضل على السكان والزراعة والصناعة.

4- ادارة الخدمات :

تستخدم بحوث العمليات في النواحي الخدمية مثل المستشفيات ووسائل النقل وبعض الدوائر الحكومية في صفوف الانتظار، وايضاً في تنظيم وصول القطارات والطائرات.

5- ادارة التسويق :

تستخدم بحوث العمليات في التسويق بحيث نستطيع التنبؤ بالطلب عند مستويات المخزون المتدينة واختيار المنتج الذي يحقق أعلى عائد وفي تحديد الأساليب التسويقية للمنتجات.

6- الادارة المالية :

تطبق بحوث العمليات في الادارة المالية لمساعدة المالي في نواحي عديدة منها التخطيط لزيادة ارباح المنظمة والتخطيط للمشروع وزيادة رأس المال بالاضافة إلى تحليل التدفق النقدي .

البرمجة الخطية : Linear Programming

مقدمــة :

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسـية والمهمـة في بحـوث العمليـات وتكمـن أهميتهـا في كونهـا وسيلة لدراسة سلوك عدد كبير من الانظمة .

وتعرف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة مـن المـوارد والامكانيـات المحـدودة عـلى عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعـة مـن القيـود والعوامـل الثابتـة بحيـث يحقـق هـذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي أن يكون توزيعها مثالياً.

أما المصطلح برمجة خطية فهو مشتق من كلمتين الأولى: برمجة وتعني وضع خطـوات لحـل مسـألة أو موضوع ما لبلوغ هدف معين وتحقيقه.

والثانية: خطية وتعني افتراض تغير الظاهرة التي تقوم بدراستها بصورة خطية، وكثـيراً مـا يسـتخدم هـذا الافـتراض لتعريف الواقع إلى صيغة رياضية سهلة.

صياغة نموذج البرمجة الخطية :

يقصد بصياغة النموذج هو التعبير عن العلاقات الواقعية بعلاقات رياضية مفترضة ومبنية عـلى دراسـة الواقع وتحليله، وتبعاً لصيغة المسألة يمكن تقييم النموذج إما بيانياً أو رياضـياً هـذا وتعـد صـياغة النمـوذج أهـم مرحلة من مراحل البرمجة الخطية ولصياغة نموذج البرمجة الخطية نتعرف على مكونات النموذج.

مكونات نموذج البرمجة الخطية

يتكون نموذج البرمجة الخطية من العناصر الأساسية التالية :

1- دالة الهدف : Objective Function

تحـدد هـذه الدالـة الهـدف المرجـو مـن النمـوذج ويكـون هـذا الهـدف إمـا تحقيـق أعـلى عائـد (Maximization) أو أقل تكلفة (Minimization) وتحوي دالة الهدف على

متغيرين فأكثر ترمز إلى عدد الوحدات المنتجة من كل نوع في النموذج، أما معاملات المتغيرات فتكون ربح الوحدة اذا كانت الدالة ربح وتكلفة الوحدة اذا كانت دالة تكاليف.

2- القيود : Constraints

كل نموذج انتاج يكون مفروضاً عليه مجموعة من القيود التي تكون سقفاً للانتاج مثل الموارد المتاحة أو ساعات العمل إلى غير ذلك .

3- شرط عدم السالبية : Non-negativity

يكون الشرط الأساسي للنموذج أن جميع المتغيرات الداخلة في النموذج موجبة أو صفرية.

مثال:

مصنع لانتاج صوبات الغاز ينتج نوعين من الصوبات A, B وكل نوع يمر بمرحلتين انتاجيتين الأولى وطاقتها الانتاجية 40 ساعة إسبوعياً والمرحلة الثانية وطاقتها الانتاجية 60 ساعة إسبوعياً فإذا كان النوع الأول يحتاج إلى 4 ساعات في المرحلة الأولى و10 ساعات في المرحلة الثانية، أما النوع الثاني فيحتاج إلى 5 ساعات في المرحلة الأولى و 6 ساعات في المرحلة الثانية.

اكتب صيغة نموذج البرمجة الخطية الذي يحقق أعلى عائد اذا كان ربح الوحدة من النوع الأول 3 دنانير وربح الوحدة من النوع الثاني 6 دنانير.

الحل:

1- في البداية نفرض المتغيرات والتي تمثل عدد الوحدات المنتجة من كل نوع

نفرض X_1 عدد الوحدات المنتجة من النوع A

ونفرض X_2 عدد الوحدات المنتجة من النوع B

2- نحدد دالة الهدف والتي تكون Max Z اذا كانت ربح Min Z اذا كانـت تكلفـة. وفي مثالنـا هـذا نـرى أن دالـة الهدف هي ربح وبالتالي تكون Max Z

وكما اسلفنا سابقاً فإن المتغيرات في دالة الهدف هي عدد الوحدات المنتجة من كل نـوع وهـي X_1, X_2 ومعاملاتهـا أرباح الوحدة من كل نوع. وبالتالي تصبح دالة الهدف على الصورة

$$Max\ Z = 3X_1 + 6X_2$$

3- القيود :

تكون القيود تتبع المراحل الانتاجية. فالقيد الأول هو قيد المرحلة الأولى والقيد الثاني قيد المرحلة الثانية يكون القيد الأول أقل من أو يساوي (40) وذلك لأن الطاقة التشغيلية لهذه المرحلـة هـي (40) وتكـون معـاملات المتغيرات هي الساعات التي يحتاجها كل نوع في هذه المرحلة ليصبح القيد

$$4X_1 + 5X_2 \leq 40$$

وبنفس يكون القيد الثاني :

$$10X_1 + 6X_2 \leq 60$$

4- العنصر الاخير من عناصر نموذج البرمجة الخطية هو شرط عدم السالبية والذي يجعل جميع المتغيرات الداخلـة في النموذج X_1 , X_2 موجبة أو صفرية أي :

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

فيصبح النموذج بشكله النهائي على الصورة

$$Max\ Z = 3X_1 + 6X_2$$

Subject to ,

$$4X_1 + 5X_2 \leq 40$$

$$10\ X_1 + 6X_2 \leq 60$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ولكي نعرف عدد الوحدات الواجب انتاجها لتحقق أكبر ربح يجب أن نحل النموذج ونجد قيم X_1, X_2 ومن ثم قيمة Z وسنستخدم طريقتان للحل هما :

1- الطريقة البيانية

2- الطريقة المبسطة

الطريقة البيانية : Graphical Method

تستخدم هذه الطريقة فقط اذا كان عدد المتغيرات في النموذج متغيرين فقط، وسنأخذ المثال السابق كتطبيق على هذه الطريقة ونشرحها من خلاله

1- يكون الرسم للقيود فقط .

2- نحول إشارة القيود إلى مساواة .

$$4X_1 + 5X_2 = 40$$

$$10X_1 + 6X_2 = 60$$

3- نجعل المحور الافقي X_1 والعمودي X_2

4- نجد نقطة تقاطع القيد مع محور X_1 وذلك بجعل $X_2 = 0$ ونقطة تقاطعه مع محور X_2 يجعل $X_1=0$

نقاط تقاطع القيد الأول

$X_2=0 \Leftarrow 4X_1=40 \Leftarrow X_1=10 \Leftarrow$ نقطة التقاطع (10 , 0)

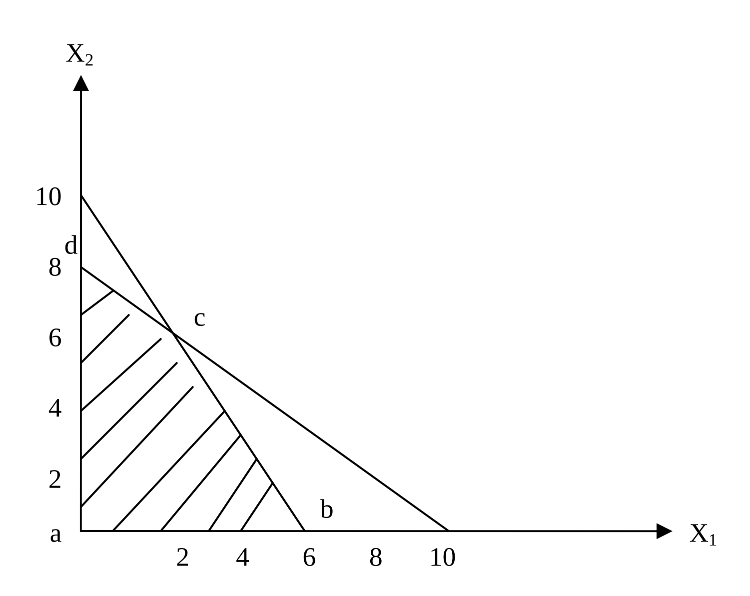
$X_1=0 \Leftarrow 5X_2=40 \Leftarrow X_2=8 \Leftarrow$ نقطة التقاطع (0 , 8)

القيد الثاني :

$X_2=0 \Leftarrow 10X_1=60 \Leftarrow X_1=6 \Leftarrow$ نقطة التقاطع (6 , 0)

$X_1=0 \Leftarrow 6X_2=60 \Leftarrow X_2=10 \Leftarrow$ نقطة التقاطع (0 , 10)

5- نحدد نقاط التقاطع على المحاور ونصل بينها بخط مستقيم



6- تكون منطقة الحل للقيد للأسفل وعلى اليسار اذا كان القيد أقل من أو يساوي، وعلى يمين وللأعلى اذا كان اكبر من أو يساوي

7- تكون منطقة الحل للنموذج Feasible Region هي منطقة تقاطع حلول القيود (المنطقة المظللة في الرسم) وتحدد برؤوس المنطقة وهي a, b, c, d

8- نجد قيم X_1 , X_2 عند رؤوس منطقة ونعوضها في دالة الهدف Z ونضعها في جدول كالآتي:

النقطة	X_1	X_2	$Z= 3X_1 + 6X_2$
a	0	0	0
b	6	0	18
c	2.31	6.15	43.83
d	0	8	48

لايجاد احداثيات النقطة c نأخذ معادلتي القيدين ونجد قيم X_1, X_2 من حل معادلتين بمجهولين

$$4X_1 + 5X_2 = 50$$

$$10X_1 + 6X_2 = 60$$

نحل المعادلتين بطريقة الحذف وتكون:

$X_1 = 2.31$ $\qquad$ $X_2 = 6.15$

9- يكون الحل الأمثل Optemal Solution

أ- عند اكبر قيمة للمتغير Z اذا كانت دالة الهدف Max

ب- عند أقل قيمة للمتغير Z اذا كانت دالة الهدف Min

∴ الحل الأمثل للنموذج هو :

$X_1 = 0$ $\qquad$ $X_2 = 8$ $\qquad$ $Z = 48$

وهذا يعني بأننا سننتج 8 وحدات من النوع الثاني ولا ننتج شيء من النوع الأول وهذا سيعطي أعلى ربح وهـو 48 دينار .

مثال:

أوجد الحل الامثل للنموذج التالي باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + X_2$$

Subject to ,

$$X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1 - X_2 \leq 2$$

$$X_1 - 2X_2 \leq 1$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

1- نحول القيود إلى مساواة

$$X_1 + 2X_2 = 10$$

$$X_1 + X_2 = 6$$

$$X_1 - X_2 = 2$$

$$X_1 - 2X_2 = 1$$

2- نجد نقاط التقاطع مع المحاور

القيد الأول

$$(10 , 0) \Leftarrow X_1=10 \Leftarrow X_2=0$$

$$(0 , 5) \Leftarrow X_2=5 \Leftarrow X_1=0$$

القيد الثاني

$$(6 , 0) \Leftarrow X_1=6 \Leftarrow X_2=0$$

$$(0 , 6) \Leftarrow X_2=6 \Leftarrow X_1=0$$

القيد الثالث

$$(2 , 0) \Leftarrow X_1=2 \Leftarrow X_2=0$$

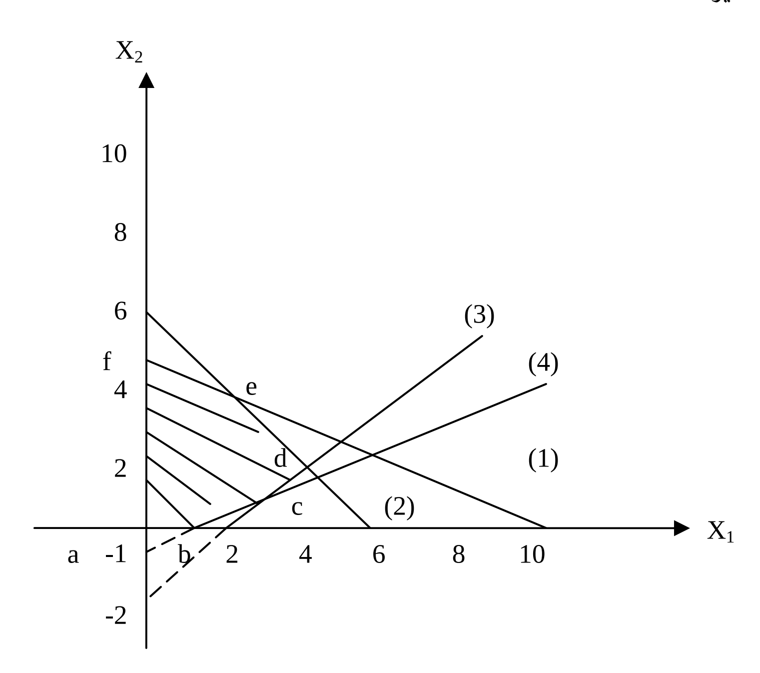
$$(0 , -2) \Leftarrow X_2=-2 \Leftarrow X_1=0$$

القيد الرابع

$$(1 , 0) \Leftarrow X_1=1 \Leftarrow X_2=0$$

$$(-\frac{1}{2}\ )0 , \Leftarrow X_2 = = -\frac{1}{2} \Leftarrow X_1=0$$

3- نرسم القيود



4- تكون منطقة الحل هي a, b, c, d, e, f

5- جدول الحل النهائي

النقطة	X_1	X_2	$Z= 2X_1 + X_2$
a	0	0	0
b	0.5	0	1
c	3	1	7
d	4	2	10
e	2	4	8
f	0	5	5

لايجاد احداثيات c نأخذ معادلتي القيدين (4) (3)

$X_1 - X_2 = 2$

$X_1 - 2X_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 3 \quad , \quad X_2 = 1$

لايجاد احداثيات النقطة d نأخذ القيدين (3) ، (2)

$X_1 + X_2 = 6$

$X_1 - X_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 4 \quad , \quad X_2 = 2$

لايجاد احداثيات النقطة e نأخذ القيدين (2) ، (1)

$X_1 + 2X_2 = 10$

$X_1 + X_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 2 \quad , \quad X_2 = 4$

بما أن دالة الهدف Max Z فإن الحل الأمثل يكون عند اكبر قيمة.

∴ الحل الأمثل يكون عند النقطة d حيث :

$X_1 = 4$

$X_2 = 2$

$Z = 10$

مثال:

ثلاثة مركبات معدنية توجد في نوعين من غذاء الرجيم A, B وهذه المركبات هي: اليود والفسفور والحديد والجدول التالي يعطي نسبة كل معدن في كل نوع غذاء

المعدل	A	B
اليود	0.15	0.10
الفسفور	0.75	1.70
الحديد	1.30	1.10

فإذا كانت تكلفة الغذاء A هي (2$) والغذاء B هي (1.70$) وتكون الاحتياجات اليومية الأساسية من هذه المركبات هي على الأقل (1.0mg) من اليود (7.5mg) من الفسفور و (10.0mg) من الحديد

ما هي عدد الغرامات المصنعة من كل نوع من الاغذية والذي يحقق أقل تكلفة ممكنة.

الحل:

نكون في البداية النموذج الرياضي ومن ثم نحله بطريقة الرسم البياني

نفرض عدد الغرامات المنتجة من الغذاء الأول = X_1

وعدد الغرامات المنتجة من الغذاء الثاني = X_2

دالة الهدف تكون MinZ لانها تكلفة :

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 1.7X_2$$

s.t ,

$$0.15\ X_1 + 0.10\ X_2 \geq 1.0$$

$$0.75\ X_1 + 1.70\ X_2 \geq 7.5$$

$$1.3\ X_1 + 1.10\ X_2 \geq 10$$

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 0$$

والآن نحل هذا النموذج بطريقة الرسم البياني

$$0.15\ X_1 + 0.10\ X_2 = 1.0$$

$$0.75\ X_1 + 1.70\ X_2 = 7.5$$

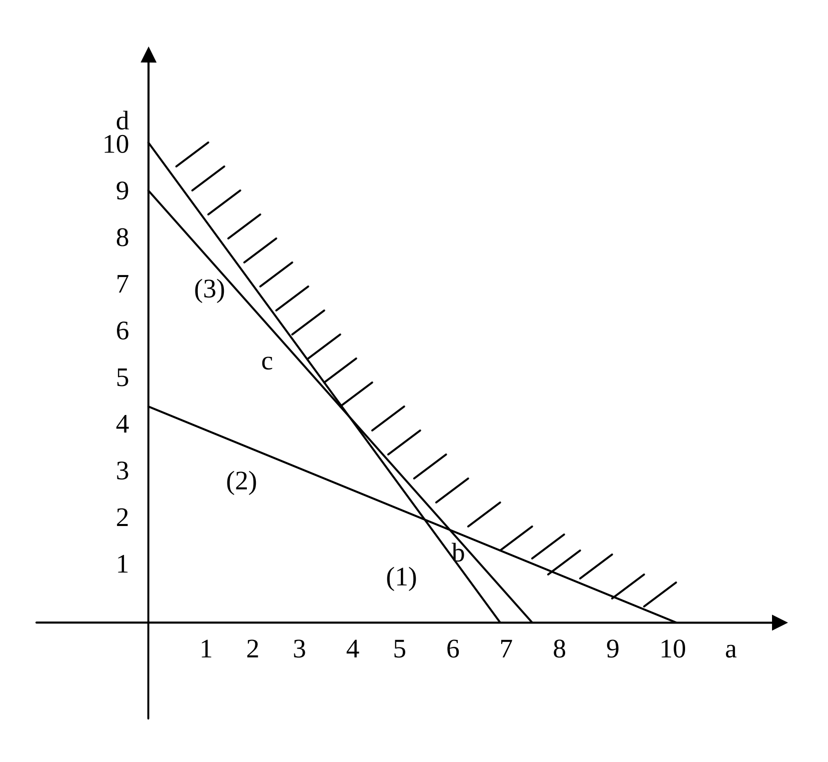
$$1.30\ X_1 + 1.10\ X_2 = 10.0$$

نجد نقاط التقاطع مع المحاور .

القيد الأول = (10 , 0) , (0 , 6.7)

القيد الثاني = (4.4 , 0) , (0 , 10)

القيد الثالث = (9.1 , 0) , (0 , 7.7)



جدول الحل النهائي:

النقطة	X_1	X_2	$Z= 2X_1 + 1.7X_2$
a	10	0	2(10) + 1.7(0) = 20
b	6.32	1.62	2(6.32) + 1.7(1.62) = 15.39
c	2.86	5.71	2(2.86) + (1.7)(5.71) = 15.43
d	0	10	2(0) + 1.7(10) = 17

∴ الحل الأمثل والذي يقلل التكلفة عند النقطة b وهو

$X_1 = 6.32 \quad , \quad X_2 = 1.62 \quad , \quad Z = 15.39$

لايجاد احداثيات b نأخذ معادلتي القيدين (3) ، (2)

$-1.1 \ / \ 0.75X_1 + 1.7\ X_2 = 7.5$

$1.7 \ / \ 1.3\ X_1 + 1.1\ X_2 = 10$

$2.21\ X_1 + 1.87\ X_2 = 17$

$-\ 0.824\ X_1 - 1.87\ X_2 = -8.25$

بالجمع

$1.385\ X_1 = 8.75$

$X_1 = 6.32$

$1.3 \ / \ 0.75\ X_1 + 1.7\ X_2 = 7.5$

$-\ 0.75 \ / \ 1.3\ X_1 + 1.1\ X_2 = 10$

$0.975\ X_1 + 2.21\ X_2 = 9.75$

$-\ 0.975\ X_1 - 0.825\ X_2 = -7.5$

بالجمع

$1.385\ X_2 = 2.25$

$\therefore\ X_2 = 1.62$

ولايجاد احداثيات c نأخذ القيدين (3) ، (1)

$0.15\ X_1 + 0.10\ X_2 = 10$

$1.3\ X_1 + 1.1\ X_2 = 10$

وبحل المعادلتين بطريقة الحذف ينتج $X_2 = 5.71$, $X_1 = 2.86$

مثال :

حل نموذج التالي بالطريقة البيانية

$\text{Min } Z = 3X_1 + 4X_2$

s.t ,

$4X_1 + 10X_2 \leq 40$

$7X_1 + 8X_2 \leq 56$

$$X_1 \geq 3$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

$$4X_1 + 10X_2 = 40$$

$$7X_1 + 8X_2 = 56$$

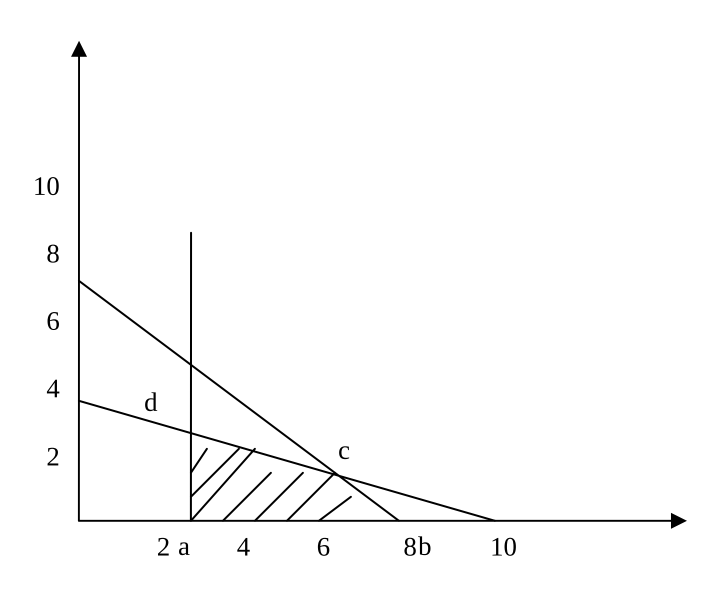
$$X_1 = 3$$

نقاط التقاطع مع المحاور هي :

القيد الأول $(4 , 0) , (0 , 10)$

القيد الثاني $(7 , 0) , (0 , 8)$

القيد الثالث $(0 , 3)$



وسيكون جدول الحل النهائي هو :

النقطة	X_1	X_2	$Z= 3X_1 + 4X_2$
a	3	0	$Z_a = 9 + 0 = 9$
b	8	0	$Z_b = 24 + 0 = 24$
c	$\frac{120}{19}$	$\frac{28}{19}$	$Z_c = \frac{360}{19} + \frac{112}{19} = \frac{472}{19}$
d	3	2.8	$Z_d = 9 + 11.2 = 20.2$

لايجاد احداثيات النقط c نأخذ القيدين (1) ، (2)

$7 / 4X_1 + 10X_2 = 40$

$4 / 7X_1 + 8X_2 = 56$

$28X_1 + 70X_2 = 280$

$28X_1 + 32X_2 = 224$

نطرح ________________________

$38X_2 = 56$

$$X_2 = \frac{56}{38} = \frac{28}{19}$$

نكرر نفس العملية لـ X1

$4 / 4X_1 + 10X_2 = 40$

$5 / 7X_1 + 8X_2 = 56$

$35X_1 + 40X_2 = 280$

$16X_1 + 40X_2 = 160$

نطرح ________________________

$19X_1 = 120$

$$X_1 = \frac{120}{19}$$

لايجاد إحداثيات d نأخذ القيدين (1) (3)

وتكون $X_1=3$ من القيد الثالث

نعوضها في القيد الأول

$$4(3) + 10X_2 = 40$$

$$12 + 10X_2 = 40$$

$$X_2 = \frac{28}{10} = 2.8$$

بما أن دالة الهدف تقليل التكلفة فإن الحل يكون عند أقل قيمة لـ Z وهي Za =9

∴ يكون الحل الامثل هو :

$$X_1 = 3$$

$$X_2 = 0$$

$$Z = 9$$

التطبيقات باستخدام الحاسوب :

سنستخدم في هذا التطبيق برنامج (TORA) من كتاب د. حمدي طه حيث يكون حل الامثلة الاربعة السابقة باستخدام برنامج TORA كالآتي:

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: qusion 1

	x1	x2		
Maximize	3.00	6.00		
Subject to				
(1)	4.00	5.00	<=	40.00
(2)	10.00	6.00	<=	60.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

LINEAR PROGRAMMING -- GRAPHICAL SOLUTION

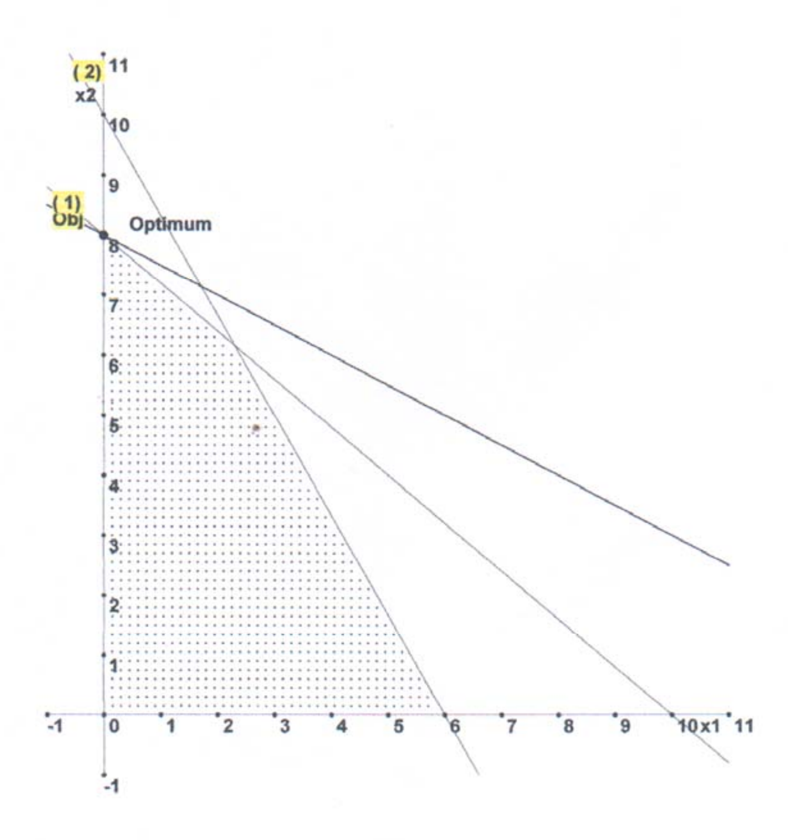
Title: qusion 1

Summary of Optimal Solution:

Objective Value = 48.00

x1 = 0.00

x2 = 8.00



TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 22:58

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

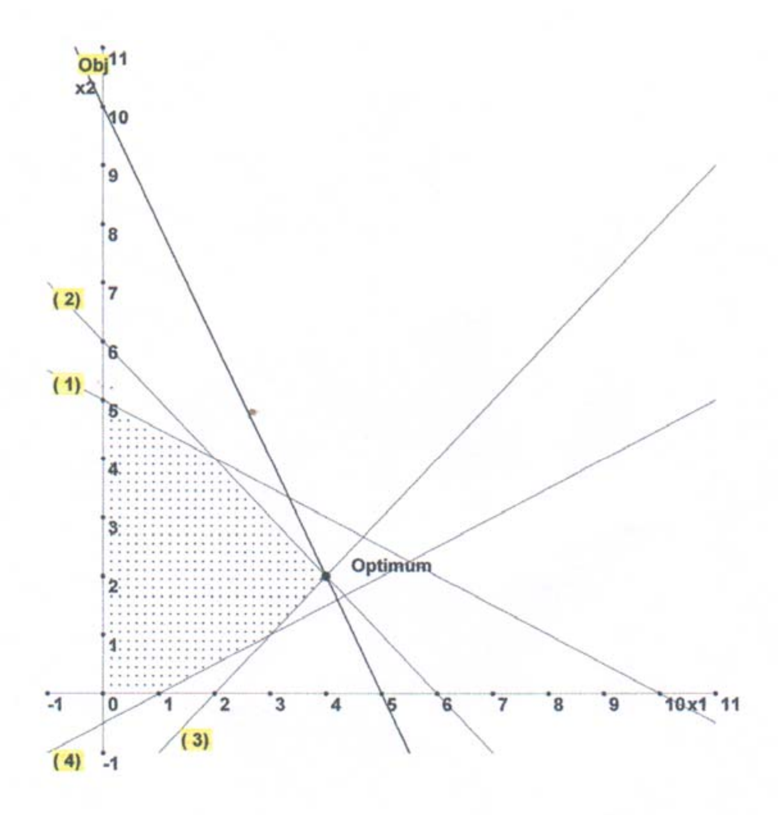
Title: qusion2

	x1	x2		
Maximize	2.00	1.00		
Subject to				
(1)	1.00	2.00	<=	10.00
(2)	1.00	1.00	<=	6.00
(3)	1.00	-1.00	<=	2.00
(4)	1.00	-2.00	<=	1.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

LINEAR PROGRAMMING -- GRAPHICAL SOLUTION

Title: qusion2

Summary of Optimal Solution:
Objective Value = 10.00
x1 = 4.00
x2 = 2.00



LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: qus3

	x1	x2		
Minimize	2.00	1.70		
Subject to				
(1)	0.15	0.10	>=	1.00
(2)	0.75	1.70	>=	7.50
(3)	1.30	1.10	>=	10.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

LINEAR PROGRAMMING -- GRAPHICAL SOLUTION

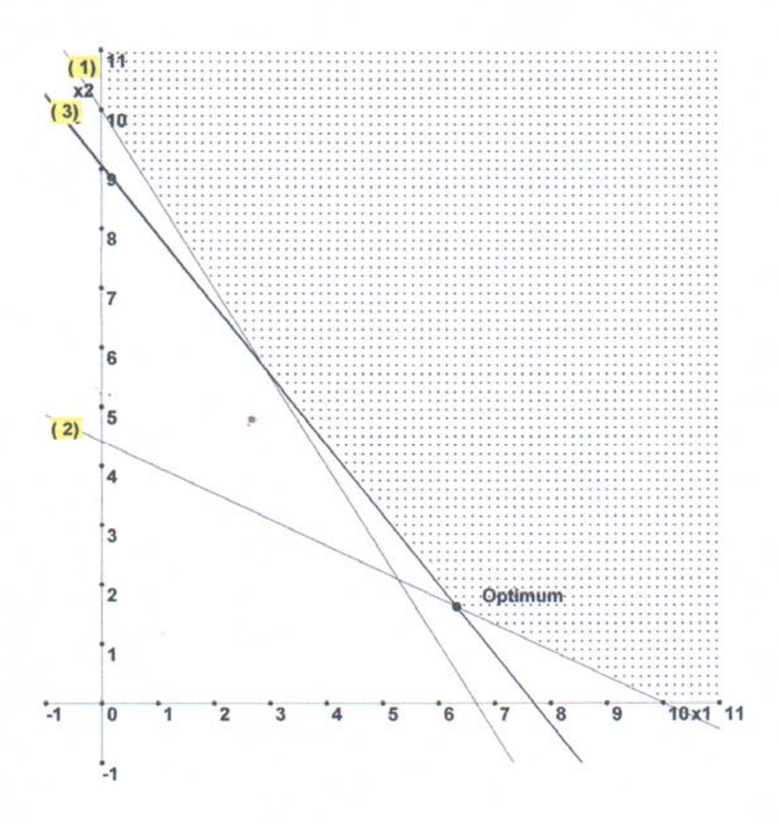
Title: qus3

Summary of Optimal Solution:

Objective Value = 15.40

x1 = 6.32

x2 = 1.62



TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:01

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q4

	x1	x2		
Minimize	3.00	4.00		
Subject to				
(1)	4.00	10.00	<=	40.00
(2)	7.00	8.00	<=	56.00
(3)	1.00	0.00	>=	3.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

LINEAR PROGRAMMING -- GRAPHICAL SOLUTION

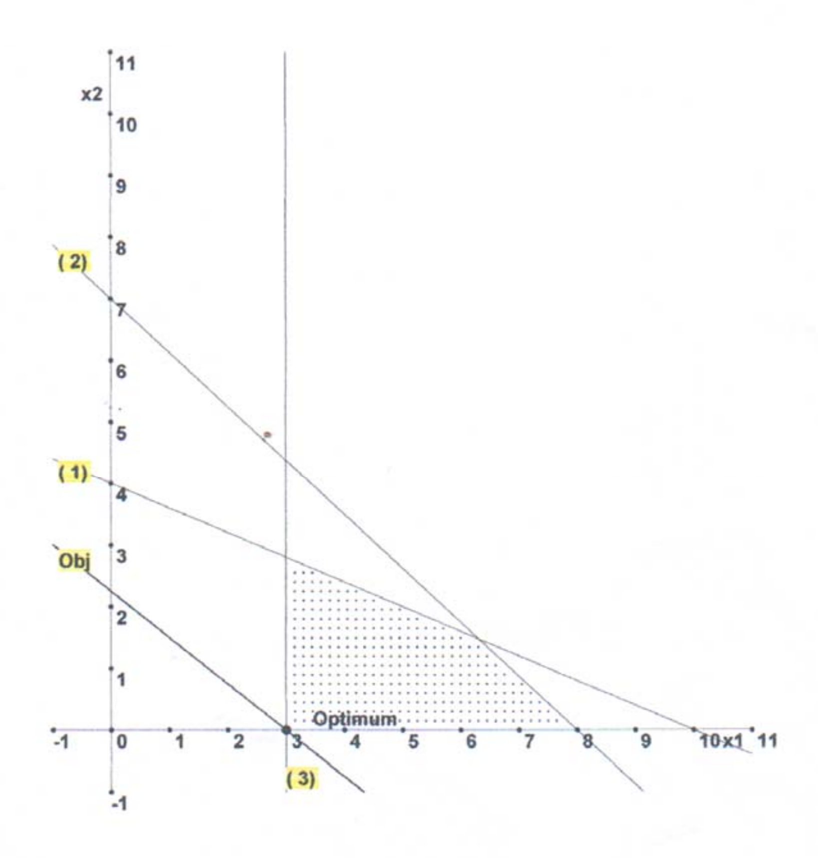
Title: q4

Summary of Optimal Solution:

Objective Value = 9.00

x1 = 3.00

x2 = 0.00



حالات خاصة للرسم البياني :

1- التكرار (التفسخ) Degeneracy

عند رسم القيود وتحديد منطقة الحل يكون هناك قيد أو اكثر ليس لها تأثير على الحل ولا تنتمي إلى منطقـة حـل النموذج ويسمى في هذه الحالة قيد فائض

مثال :

ما هي الحالة الخاصة الموجودة في النموذج

$$Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$$

s.t ,

$$3X_1 + 6X_2 \leq 18$$

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10$$

$$X_1 \leq 8$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

نجد نقاط التقاطع مع المحاور وهي :

القيد الأول: $3X_1 + 6X_2 = 18$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 3$ (0 , 3)

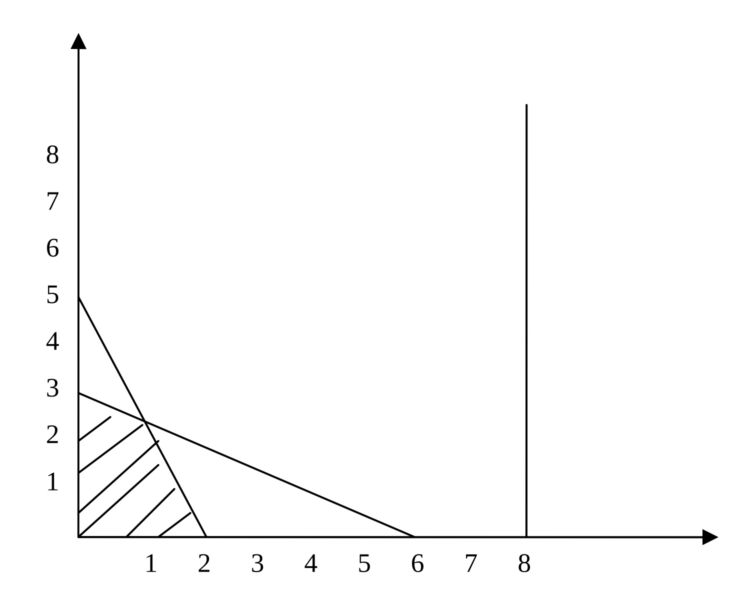
$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 6$ (6 , 0)

القيد الثاني: $5X_1 + 2X_2 = 10$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 5$ (0 , 5)

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 2$ (2 , 0)

القيد الثالث: $X_1 = 8$ (8 , 0)



نلاحظ هنا أن القيد الثالث ليس له علاقة بمنطقة الحل لذا فهو قيد فائض

والحالة الخاصة في هذه الحالة تسمى تكرار

2- الحلول البديلة : Alterative Solutions

احتمالية وجود اكثر من حل أمثل للنموذج

مثال:

جد الحل الامثل للنموذج التالي باستخدام طريقة الرسم البياني

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

s.t

$$X_1 + 2X_2 \leq 24$$

$$1.5X_1 + X_2 \leq 18$$

$$X_1 \leq 10$$

$$X_2 \leq 11$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

نجد نقاط تقاطع القيود مع المحاور فتكون

القيد الأول: $X_1 + 2X_2 = 24$

$X_1=0 \Leftarrow X_2=12$ (0 , 12)

$X_2=0 \Leftarrow X_1=24$ (24 , 0)

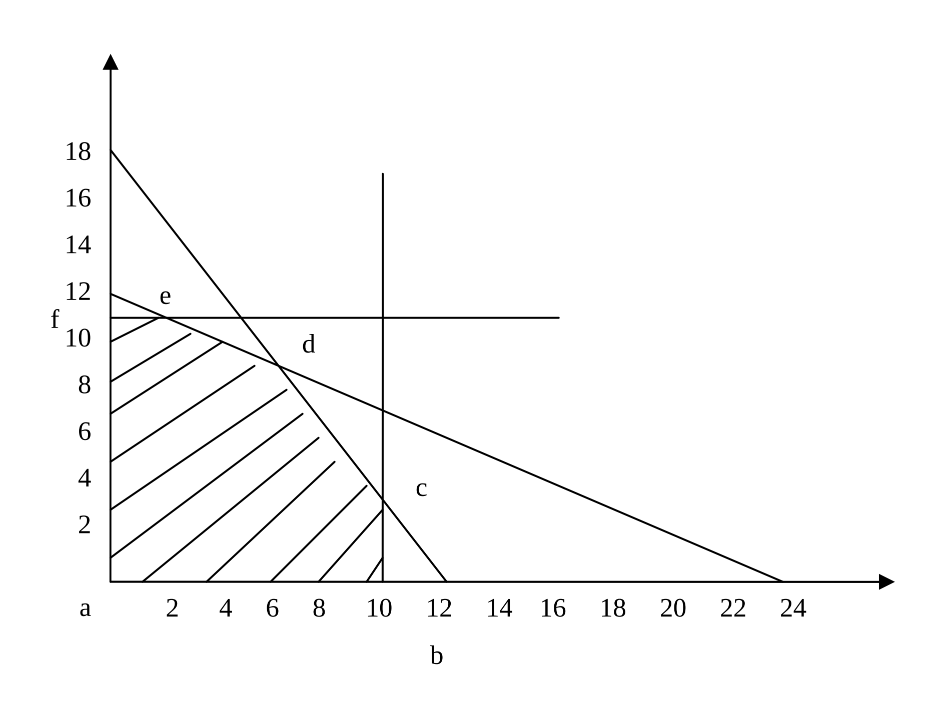
القيد الثاني: $1.5X_1+X_2=18$

$X_1=0 \Leftarrow X_2=18$ (0 , 18)

$X_2=0 \Leftarrow X_1=12$ (12 , 0)

القيد الثالث: $X_1=10$ (10 , 0)

القيد الرابع: $X_2=11$ (0 , 11)



نكون جدول الحل النهائي

النقطة	X_1	X_2	$Z= 2X_1 + 2X_2$
a	0	0	0
b	10	0	$10 + 2(0) = 10$
c	10	3	$10 + 2(3) = 16$
d	6	9	$6 + 2(9) = 24$
e	2	11	$2 + 2(11) =24$
f	0	11	$0 + 2(11) = 22$

لايجاد c نأخذ القيدين

$1.5X_1 + X_2 = 18$

$X_1 = 10$

$(1.5)(10) + X_2 = 18$

$15 + X_2 = 18 \Rightarrow X_2 = 3$

لايجاد d نأخذ القيدين

$X_1 + 2X_2 = 24 \quad \Rightarrow \quad 1.5X_1 + 3X_2 = 36$

$1.5X_1 + X_2 = 18 \qquad\qquad 1.5X_1 + X_2 =18$

بالطرح

$2X_2 = 18 \Rightarrow X_2 = 9$

نعوضها في المعادلة الاولى

$X_1 + 18 = 24 \quad \Rightarrow \quad X_1 = 6$

لايجاد e نأخذ القيدين

$X_1 + 2X_2 = 24$

$X_2 = 11$

$X_1 + 22 = 24$

$X_1 = 2$

بما أن دالة الهدف Max فيكون الحل الامثل عند اكبر قيمة لـ Z وهي (24) وهذه القيمة تتكرر عند نقطتين d , e وبالتالي يكون هناك حلين أمثلين للنموذج هما:

الحل الأول: $X_1 = 6$

$X_2 = 9$

$Z = 24$

الحل الثاني: $X_1 = 2$

$X_2 = 11$

$Z = 24$

3- منطقة حل غير محددة (مفتوحة) Unbounded Feasible Region

تكون منطقة الحل مفتوحة من أحد الأطراف أو اكثر وفي هذه الحالة يكون هناك حل للنموذج اذا كانت دالة الهدف Min ولا يوجد حل أمثل للنموذج اذا كانت دالة الهدف Max

مثال:

حدد الحالة الخاصة التي يمثلها النموذج التالي وبين فيما اذا كان هناك حل للنموذج أم لا

$$Max\ Z = 4X_1 + 8X_2$$

s.t

$$4X_1 + 3X_2 \geq 12$$

$$X_2 \leq 5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

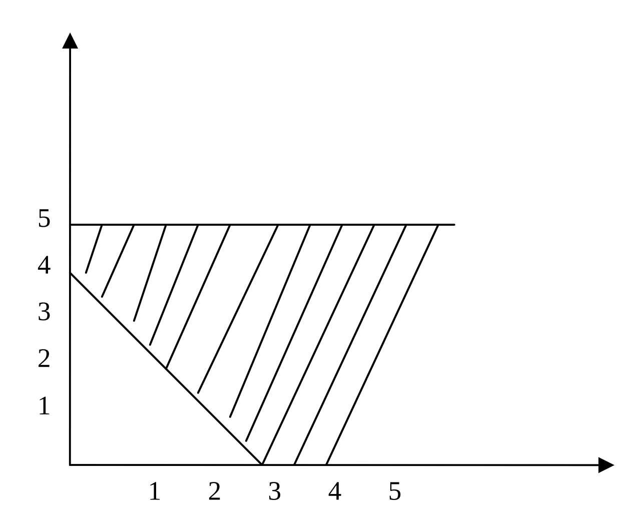
نجد نقاط التقاطع مع المحاور

القيد الأول $4X_1 + 3X_2 = 12$

$X_1 = 0 \Rightarrow X_2 = 4$ (0 , 4)

$X_2 = 0 \Rightarrow X_1 = 3$ (3 , 0)

القيد الثاني: $X_2 = 5$ (0 , 5)



الحالة الخاصة الموجودة في النموذج هي منطقة حل مفتوحة ولا يوجد حل أمثل للنموذج لأن دالة الهدف Max .

4- عدم توفر حل: Infeasible region

لا تتقاطع مناطق حلول القيود وبالتالي لا تتوفر منطقة حل للنموذج (أي لا يوجد حل للنموذج)

مثال:

أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي إن وجد

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

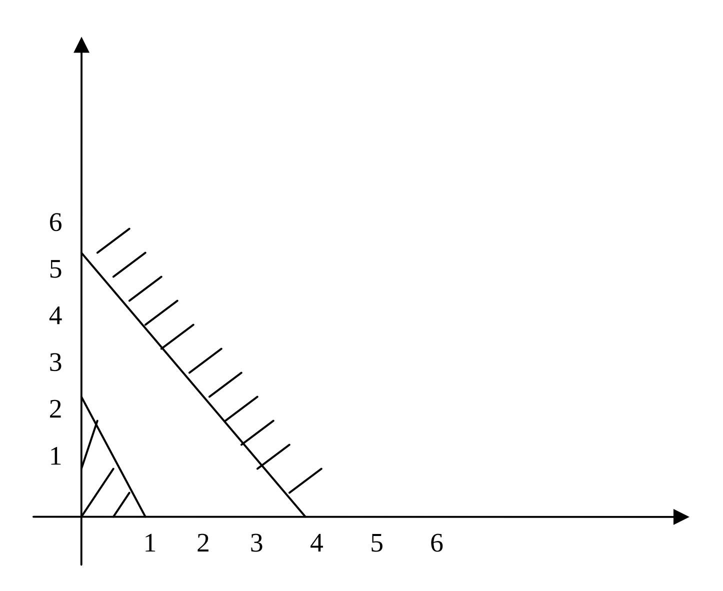
s.t ,

$$5X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ويكون الرسم للنموذج كالآتي:



لا تتقاطع منطقة حل القيد الأول مع القيد الثاني وبالتالي لا يوجد منطقة حل للنموذج ولا يوجد حل ايضاً للنموذج .

الطريقة المبسطة: Simplex method

في بداية الحل بهذه الطريقة يجب تحويل النموذج الى الشكل القياسي Standard from ويكون الشكل القياسي للقيود بتحويل المتباينات إلى معادلات وذلك بإضافة أو طرح متغير وهمي (Slack) إلى الطرف الايسر من القيد .

أما بالنسبة لدالة الهدف فتحول جميع المتغيرات إلى طرف والثوابت إلى طرف آخر ويضيف للطرف الايسر المتغيرات الوهمية حيث تكون معاملاتها اصفار

مثال:

حول النموذج التالي إلى الشكل القياسي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

s.t

$$4X_1 + 3X_2 \leq 2$$

$$2X_1 + X_2 \geq 3$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

القيد الأول نضيف للطرف الايسر S_1 لانه أقل من الطرف الايمن فيصبح

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 2$$

أما القيد الثاني فنطرح من الطرف الايسر S_2 لانه اكبر من الطرف الأيمن فيصبح

$$2X_1 + X_2 - S_2 = 3$$

أما بالنسبة لدالة الهدف فتصبح

$$Z - 3X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

ويكون النموذج بشكله النهائي كالآتي:

$$Z - 3X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

s.t ,

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 2$$

$$2X_1 + X_2 - S_2 = 3$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

ولشرح خطوات الحل بالطريقة المبسطة نأخذ المثالين التاليين :

مثال:

شركة لصناعة الاثاث تصنع نوعين من الاثاث أطقم الكراسي الفاخرة وطاولات السفرة فإذا كان يـربح في كـل طقـم (80 دينار) وفي كل طاولة (45 دينار) وكل منتج من هذه

المنتجات يحتاج إلى مواد أولية أخشاب وساعات عمل اسبوعية فإذا كان حجم الاخشاب المتوفر (400) لوح ومجموع ساعات العمل الاسبوعية 450 ساعة، فإذا كان طقم الكراسي يحتاج إلى 20 لوح من الاخشاب و(15) ساعة عمل، بينما تحتاج الطاولة إلى 5 ألواح من الخشب و10 ساعات عمل.

أوجد عدد الاطقم من الكراسي والطاولات الواجب انتاجها حتى يكون الربح اكبر ما يمكن

الحل:

أولاً نكتب نموذج البرمجة الخطية المتعلق بالمسألة بحيث:

نفرض عدد أطقم الكراسي المنتجة: X_1

ونفرض عدد الطاولات المنتجة : X_2

وتكون دالة الهدف تعظيم أرباح

$$Max\ Z = 80X_1 + 45X_1$$

Subject to ,

القيود :

قيد الاخشاب $20X_1 + 5X_2 \leq 400$

قيد ساعات العمل $15X_1 + 10X_2 \leq 450$

شرط عدم السالبية $X_1 , X_2 \geq 0$

ويكون النموذج بشكله النهائي

$$Max\ Z = 80X_1 + 45X_2$$

Subject to ,

$$20X_1 + 5X_2 \leq 400$$

$$15X_1 + 10X_2 \leq 450$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

ولحـــل النمـــوذج بالطريقـــة المبســـطة نحـــول النمـــوذج أولاً إلى الشـــكل القيـــاسي حيـــث تكـــون القيود

$$20X_1 + 5X_2 + S_1 = 400$$

$$15X_1 + 10X_2 + S_2 = 450$$

أما دالة الهدف فهي

$$Z - 80X_1 - 45X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

أما شرط عدم السالبية فتدخل المتغيرات الجديدة فيه

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية:

نكون جدول الحل الابتدائي بافتراض أن الأرباح تساوي صفر ويتكون الجدول من العناصر التالية:

1- العمود الايسر الأول يكون للمتغيرات الأساسية التـي يعتمـد عليهـا الحـل لدالـة الهـدف وبمـا أن الحـل الابتدائي يفترض أن الأرباح تساوي صفر فإن المتغيرات الأساسية التي يعتمد عليها الحل تكون المتغيرات الوهمية S_1 , S_2

2- الصف الافقي الأول في الأعلى يكون جميع المتغيرات الداخلة في النموذج.

3- الصف الأخير في الجدول يكون لدالة الهدف Z

4- نعبأ الجدول بمعاملات المتغيرات في القيود ودالة الهدف

5- العمود الأخير يكون للطرف الايمن للقيد (R.H.S) ويكون الحل للنموذج أيضاً.

6- يضاف عمود بعد العمود (R.H.S) يسمى النسبة Ratio وسنتعرف عليها في المتغير الخارج لاحقاً.

∴ يكون جدول الحل الابتدائي كالآتي:

المتغيرات الاساسية Basic Variable	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
S_1	20	5	1	0	400	$\frac{400}{20}=20$
S_2	15	10	0	1	450	$\frac{450}{15}=30$
Z	-80	-45	0	0	0	

نرى هنا أن قيمة Z في الحل هي صفر ومهمتنا هي تحسين الحـل أي زيـادة الاربـاح وبالتـالي يجـب الـتخلص مـن المتغيرات الأساسية التي تعطي أرباح صفر والاستعاضة عنها بمتغيرات تعطـي أربـاح وبالتـالي فهنـاك متغـير داخـل ومتغير خارج وهذه الخطوة الثالثة.

الخطوة الثالثة :

1- المتغير الداخل: يكون صاحب القيمة الأكثر سالبية في دالة الهدف Z ويكون X_1

2- المتغير الخارج: نقسم عمود R.H.S على القيم الموجبة فقط من عمود المتغير الداخل ونضعها في عمـود النسبة (Ratio) ونأخذ أقل ناتج قسمة ويكون S_1 . يسـمى العنصر تقـاطع عمـود المتغـير الـداخل مـع صف المتغير الخارج العنصر المحوري Pivot element

الخطوة الرابعة:

نجد معادلة المتغير الداخل الجديدة والناتجة عن تغير المتغير الخـارج والـداخل وتسـمى هـذه المعادلـة المحوريـة Pivot Equation (P.E) ونجدها عن طريق قسمة صف المتغير الخارج على العنصر المحوري.

$$\therefore \text{ P.E} = \frac{20,5,1,0,400}{20} = 1,\frac{1}{4},\frac{1}{20},0,20$$

الخطوة الخامسة:

هذا التغير في صف المتغير الخارج ودخول المتغير الداخل عليه ووجود P.E يؤثر على المتغيرات الاخرى، حيث يتكون لديها معادلات جديدة ونحسبها بالطريقة التالية

المعادلة الجديدة = المعادلة القديمة – (العنصر الداخل * P.E)

حيث يكون العنصر الداخل هو معامل المتغير الداخل في المعادلة المراد ايجادها

New S_2 = 15 – (15) (1) = 0

$$10 - (15)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{4}$$

$$0 - (15)\left(\frac{1}{20}\right) = -\frac{3}{4}$$

1 – (15) (0) = 1

450 – (15) (20) = 150

يمثل العمود الأول القيم القديمة في الجدول ثم اشارة السالب وبعدها معامل (X_1) في (S_2) وهو (15) والعمود الثالث يمثل المعادلة المحورية (P.E) أما العمود الأخير فيمثل القيم الجديدة للمتغير.

ولايجاد القيم الجديدة لمعادلة Z نستخدم نفس الطريقة

New Z = -80 – (-80) (1) = 0

$$-45 - (-80)\left(\frac{1}{4}\right) = -25$$

$$0 - (-80)\left(\frac{1}{20}\right) = 4$$

0 – (-80) (0) = 0

0 – (-80) (20) = 1600

الخطوة السادسة :

نكون جدول الحل الجديد من القيم الجديدة الناتجة

B.U	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
X_1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	0	20	80
S_2	0	$\frac{25}{4}$	$\frac{-3}{4}$	1	150	24
Z	0	-25	4	0	1600	

الخطوة السابعة :

ينتهي الحل عندما تصبح جميع قيم Z موجبة أو صفرية، واذا كان هناك قيمة سالبة أو اكثر فإننا نكـرر الخطـوات السابقة وابتداءً من الخطوة الثالثة.

وبما أن هناك قيمة سالبة فإننا نكرر الحل ويكون المتغير الداخل X_2 ، أما المتغير الخارج فهو (S_2)

$$P.E = \frac{0, \frac{25}{4}, \frac{-3}{4}, 1, 150}{\frac{25}{4}} = 0, 1, \frac{-3}{25}, \frac{4}{25}, 24$$

$$New\ X_1 = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)(0) = 1$$

$$\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4}\right)(1) = 0$$

$$\frac{1}{20} - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{-3}{25}\right) = \frac{2}{25}$$

$$0 - \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{25}\right) = -\frac{1}{25}$$

$$20-\left(\frac{1}{4}\right)(24)=14$$

New Z = 0 – (-25) 0 = 0

-25 – (-25) 1 = 0

$$4-(-25)\left(\frac{-3}{25}\right)=1$$

$$0-(-25)\frac{4}{25}=4$$

1600 – (-25) (24) = 2200

نكون جدول الحل الجديدة

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_1	1	0	$\frac{2}{25}$	$\frac{-1}{25}$	14
X_2	0	1	$\frac{-3}{25}$	$\frac{4}{25}$	24
Z	0	0	1	4	2200

بما أن جميع قيم Z أصبحت موجبة أو صفرية فإن هذا الجدول يكون جدول الحل النهائي ويكون الحل الأمثل من قيم عمود (R.H.S) أي

$X_1 = 14$

$X_2 = 24$

$Z = 2200$

مثال:

تنتج شركة البتروكيماويات ثلاثة منتجات هي A, B, C فإذا كان انتاج وحدة واحدة من كل نوع من المنتجات الثلاثة يجب أن تمر خلال ثلاثة مراحل، والجدول التالي يعطي الوقت اللازم لكل منتج في كل مرحلة .

المرحلة \ المنتج	A	B	C	الوقت المتاح
المرحلة الاولى	3	2	4	80
المرحلة الثانية	1	5	1	70
المرحلة الثالثة	5	4	6	90

فإذا كان ربح الوحدة من كل نوع من الأنواع الثلاثة هو على الترتيب 5, 7, 8

أوجد عدد الوحدات الواجب انتاجها من كل نوع حتى يكون الربح اكبر ما يمكن

الحل:

أولاً: نكتب النموذج الرياضي المتعلق بهذه المسألة

نفرض عدد الوحدات المنتجة من النوع X_1 : A

نفرض عدد الوحدات المنتجة من النوع X_2 : B

نفرض عدد الوحدات المنتجة من النوع X_3 : C

وبما أن النموذج نموذج أرباح فإن دالة الهدف تكون

$$Max\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 8X_3$$

أما القيود فتكون قيود المراحل الثلاثة حيث

القيد الأول $3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 80$

والقيد الثاني $X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 70$

أما القيد الثالث فهو $5X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 90$

ويكون النموذج بشكله النهائي

$$Max\ Z = 5X_1 + 7X_2 + 8X_3$$

s.t ,

$$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 \leq 80$$

$$X_1 + 5X_2 + X_3 \leq 70$$

$$5X_1 + 4X_2 + 6X_3 \leq 90$$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

ثانياً: لحل النموذج بالطريقة المبسطة نحوله بداية للشكل القياسي حيث يكون

$3X_1 + 2X_2 + 4X_3 + S_1 = 80$

$X_1 + 5X_2 + X_3 + S_2 = 70$

$5X_1 + 4X_2 + 6X_3 + S_3 = 90$

ودالة الهدف $Z - 5X_1 - 7X_2 - 8X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$

وشرط عدم السالبية $X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2, S_3 \geq 0$

نكون جدول الحل الابتدائي بافتراض أن الأرباح تساوي صفر بحيث يكون في عمود المتغيرات الأساسية المتغيرات الوهمية لانها تعطي أرباح صفر في دالة الهدف

المتغيرات الاساسية Basic Variable	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
S_1	3	2	4	1	0	0	80	20
S_2	1	5	1	0	1	0	70	70
S_3	5	4	6	0	0	1	90	15
Z	-5	-7	-8	0	0	0	0	

نلاحظ في جدول أن قيمة الربح صفر ولتحسين الحل يجب أن تتغير المتغيرات الأساسية لتصبح متغيرات لا تجعل Z = صفر وبالتالي تكون الخطوة التالية هي تحديد أي المتغيرات سيدخل وايها سيخرج:

- المتغير الداخل صاحب أكبر سالبية في Z وهو X_3

- المتغير الخارج: لايجاد المتغير الخارج نقسم عمود R.H.S على القيم الموجبة فقط في عمود المتغير الداخل ونضع ناتج القسمة في عمود (Ratio) فيكون المتغير الخارج هو S_3

عند ادخال المتغير الداخل بدل المتغير الخارج ينتج معادلة جديدة وذلك بقسمة صف المتغير الخارج على العنصر المحوري وهي المعادلة المحورية Pivot equation فتكون

$$(P.E) = \frac{5,4,6,0,0,1,90}{6}$$

$$= \frac{5}{6}, \frac{4}{6}, 1, 0, 0, \frac{1}{6}, 15$$

وعليه فإن معادلة S_1 الجديدة هي :

$$\text{New S1} = 3-(4)\frac{5}{6} = \frac{-1}{3}$$

$$2-(4)\frac{4}{6} = \frac{-2}{3}$$

$$4 - (4)1 = 0$$

$$1 - (4)0 = 1$$

$$0 - (4)0 = 0$$

$$0-(4)\frac{1}{6} = \frac{-4}{6}$$

$$80 - (4)15 = 20$$

أما معادلة S_2 فتحسب بنفس الطريقة أي

$$\text{New } S_2 = 1-(1)\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$$

$$5-(1)\frac{4}{6}=\frac{13}{3}$$

1 – (1) 1 = 0

0 – (1) 0 = 0

1 – (1) 0 = 1

$$0-(1)\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}$$

70 – (1) 15 = 55

أما معادلة Z الجديدة فنجدها أيضاً بنفس الطريقة

$$\text{New } Z = -5-(-8)\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$$

$$-7-(-8)\frac{4}{6}=-\frac{5}{3}$$

-8 – (-8) 1 = 0

0 – (-8) 0 = 0

0 – (-8) 0 = 0

$$0-(-8)\frac{1}{6}=\frac{8}{6}$$

0 – (-8) 15 = 120

نكون جدول حل جديد من القيم الجديدة الناتجة

B.U	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
S_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	1	0	$-\frac{4}{6}$	20	-
S_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{3}$	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	55	$\frac{165}{13}=12.7$
X_3	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{6}$	1	0	0	$\frac{1}{6}$	15	$\frac{45}{2}=22.5$
Z	$\frac{5}{3}$	$-\frac{5}{3}$	0	0	0	$\frac{8}{6}$	120	

- ينتهي الحل عندما تصبح جميع قيم Z موجبة أو صفرية

- اذا كان هناك قيم سالبة نكرر الخطوات السابقة فيكون المتغير الداخل هو X_2 والمتغير الخارج S_2 ونكمل كـما في الخطوات السابقة .

P.E = $\dfrac{\frac{1}{6},\frac{13}{3},0,0,1,-\frac{1}{6},55}{\frac{13}{3}}$

= $\frac{1}{26},1,0,0,\frac{3}{13},-\frac{1}{26},\frac{165}{13}$

New S_1 = $-\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{1}{26}=-\frac{4}{13}$

$-\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)1=0$

0 - $\left(-\frac{2}{3}\right)$ 0 = 0

1 - $\left(-\frac{2}{3}\right)$ 0 = 1

$$0-\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{3}{13}=\frac{2}{13}$$

$$-\frac{4}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{26}=-\frac{9}{13}$$

$$20-\left(-\frac{2}{3}\right)\frac{165}{13}=\frac{370}{13}$$

New $X_3 = \frac{5}{6}-\left(\frac{4}{6}\right)\frac{1}{26}=\frac{21}{26}$

$$\frac{4}{6}-\left(\frac{4}{6}\right)1=0$$

$$1-\left(\frac{4}{6}\right)0=1$$

$$0-\left(\frac{4}{6}\right)0=0$$

$$0-\left(\frac{4}{6}\right)\frac{3}{13}=-\frac{2}{13}$$

$$\frac{1}{6}-\left(\frac{4}{6}\right)\left(-\frac{1}{26}\right)=\frac{5}{26}$$

$$15-\left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{165}{13}\right)=\frac{85}{13}$$

New $Z = \frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)\frac{1}{26}=\frac{45}{26}$

$$-\frac{5}{3}-\left(-\frac{5}{3}\right)1=0$$

$$0-\left(-\frac{5}{3}\right)0=0$$

$$0 - \left(-\frac{5}{3}\right) 0 = 0$$

$$0 - \left(-\frac{5}{3}\right)\frac{3}{13} = \frac{5}{13}$$

$$\frac{8}{6} - \left(-\frac{5}{3}\right)\frac{1}{26} = \frac{33}{26}$$

$$120 - \left(-\frac{5}{3}\right)\frac{165}{13} = \frac{1835}{13}$$

نكون جدول الحل الجديد من القيم الناتج فيكون

B.U	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
S_1	$-\frac{4}{13}$	0	0	1	$\frac{2}{13}$	$-\frac{9}{13}$	$\frac{370}{13}$
X_2	$\frac{1}{26}$	1	0	0	$\frac{3}{13}$	$-\frac{1}{26}$	$\frac{165}{13}$
X_3	$\frac{21}{26}$	0	1	0	$-\frac{2}{13}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{85}{13}$
Z	$\frac{45}{26}$	0	0	0	$\frac{5}{13}$	$\frac{33}{26}$	$\frac{1835}{13}$

بما أن جميع قيم Z اصبحت موجبة أو صفرية فيكون هذا الجدول هو جدول الحل النهائي ويكون الحل الأمثل Optimal Solution

$X_1 = 0$

$$X_2 = \frac{165}{13}$$

$$X_3 = \frac{85}{13}$$

$$Z = \frac{1835}{13}$$

مثال :

حل النموذج التالي باستخدام الطريقة المبسطة :

$$\text{Max } Z = 15X_1 + 12X_2 + 14X_3$$

s.t ,

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 100$$

$$10X_1 + 4X_2 + 5X_3 \leq 600$$

$$2X_1 + 2X_2 + 6X_3 \leq 300$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

الحل :

نحول إلى الشكل القياسي :

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 100$$

$$10X_1 + 4X_2 + 5X_3 + S_2 = 600$$

$$2X_1 + 2X_2 + 6X_3 + S_3 = 300$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$$

$$Z - 15X_1 - 12X_2 - 14X_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 = 0$$

جدول الحل الابتدائي

B.U	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
S_1	1	1	1	1	0	0	100	100
S_2	10	4	5	0	1	0	600	60
S_3	2	2	6	0	0	1	300	150
Z	-15	-12	-14	0	0	0	0	

المتغير الداخل = X_1 ، المتغير الخارج = S_2

$$P.E = \frac{10,4,5,0,1,0,600}{10}$$

= 1, 0.4 , 0.5 , 0 , 0.1 , 0 , 60

New S_1 = 1 – (1) 1 = 0

1 – (1) 0.4 = 0.6

1 – (1) 0.5 = 0.5

1 – (1) 0 = 1

0 – (1) 0.1 = -0.1

0 – (1) 0 = 0

100 – (1) 60 = 40

New S_3 = 2 – (2) (1) = 0

2 – (2) (0.4) = 1.2

6 – (2) (0.5) = 5

0 – (2) (0) = 0

0 – (2) (0.1) = -0.2

1 – (2) (0) = 1

300 – (2) (60) = 180

New Z_2 = -15 – (-15) (1) = 0

-12 – (-15) (0.4) = -6

-14 – (-15) (0.5) = -6.5

0 – (-15) (0) = 0

0 – (-15) (0.1) = 1.5

0 – (-15) (0) = 0

0 – (-15) (60) = 900

جدول الحل الثاني

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
S_1	0	0.6	0.5	1	-0.1	0	40	80
X_1	1	0.4	0.5	0	0.1	0	60	120
S_3	0	1.2	5	0	-0.2	1	180	36
Z	0	-6	-6.5	0	1.5	0	900	

المتغير الداخل = X_3 ، المتغير الخارج = S_3

$$P.E = \frac{0,1.2,5,0,-0.2,1,180}{5}$$

$= 0 , 0.24 , 1 , 0 , -0.04 , 0.2 , 36$

New $S_1 = 0 - (0.5)(0) = 0$

$0.6 - (0.5)(0.24) = 0.48$

$0.5 - (0.5)(1) = 0$

$1 - (0.5)(0) = 1$

$-0.1 - (0.5)(-0.04) = -0.08$

$0 - (0.5)(0.2) = -0.1$

$40 - (0.5)(36) = 22$

New $X_1 = 1 - (0.5)(0) = 1$

$0.4 - (0.5)(0.24) = 0.28$

$0.5 - (0.5)(1) = 0$

$0 - (0.5)(0) = 0$

$0.1 - (0.5)(-0.04) = 0.12$

$0 - (0.5)(0.2) = -0.1$

$60 - (0.5)(36) = 42$

New Z = 0 – (-6.5) (0) = 0

-6 – (-6.5) (0.24) = -4.44

-6.5 – (-6.5) (1) = 0

0 – (-6.5) (0) = 0

1.5 – (-6.5) (-0.04) = 1.24

0 – (-6.5) (0.2) = 1.3

900 – (-6.5) (36) = 1134

جدول الحل الثالث

B.V	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
S_1	0	0.48	0	1	-0.08	-0.1	22	45.8
X_1	1	0.28	0	0	0.12	-0.1	42	150
X_3	0	0.24	1	0	-0.04	0.2	36	150
Z	0	-4.44	0	0	1.24	1.3	1134	

المتغير الداخل = X_2 ، المتغير الخارج = S_1

$$P.E = \frac{0,0.48,0,1,-0.08,-0.1,22}{0.48}$$

P.E = 0, 1, 0, 2.08 , -0.17 , -0.21 , 45.8

New X_1 = 1 – (0.28) (0) = 1

0.28 – (0.28) (1) = 0

0 – (0.28) (0) = 0

0 – (0.28) (2.08) = -0.58

0.12 – (0.28) (-0.17) = 0.17

-0.1 – (0.28) (-0.21) = -0.04

42 – (0.28) (45.8) = 29.18

New X_2 = 0 – (0.24) (0) = 0

0.24 – (0.24) (1) = 0

1 – (0.24) (0) = 1

0 – (0.24) (2.08) = -0.5

-0.04 – (0.24) (-0.17) = 0.001

0.2 – (0.24) (-0.21) = 0.25

36 – (0.24) (45.8) = 25

New Z = 0 – (-4.44) (0) = 0

-4.44 – (-4.44) (1) = 0

0 – (-4.44) (0) = 0

0 – (-4.44) (2.08) = 9.24

1.24 – (-4.44) (-0.17) = 0.5

1.3 – (-4.44) (-0.21) = 0.37

1134 – (-4.44) (45.8) = 1337.35

جدول الحل الرابع

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0	1	0	2.08	-0.17	-0.21	45.8
X_1	1	0	0	-0.58	-0.17	-0.04	29.18
X_3	0	0	1	-0.5	0.001	0.25	25
Z	0	0	0	9.24	0.5	0.37	1337.35

بما أن جميع قيم Z موجبة أو صفرية فإن الحل ينتهي هنا ويكون الحل الأمثل

X_1 = 29.18

X_2 = 45.8

X_3 = 25

Z = 1337.35

طريقة م. الكبرى : Big M. Technique

تستخدم هذه الطريقة في مسائل التقليل وخاصة اذا كانت القيود اكبر من أو اشارة مساواة، ففي هذه الحالة لا نستطيع استخدام الطريقة المبسطة بشكلها المباشر لاننا سنحتاج إلى إضافة متغير آخر يسمى المتغير الاصطناعي (Artificial Variable) وسنوضح طريقة الحل هذه من خلال المثال التالي:

مثال:

حل النموذج التالي بالطريقة المبسطة

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

s.t,

$$-2X_1 + 3X_2 = 3$$

$$4X_1 + 5X_2 \geq 10$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

نحول النموذج في البداية نحول النموذج إلى الشكل القياسي نضيف متغير وهمي إلى قيد الاقل من ونطرح آخر من قيد الاكبر من ولا نضيف شيء لقيد المساواة فتصبح القيود:

$$-2X_1 + 3X_2 = 3$$

$$4X_1 + 5X_2 - S_1 = 10$$

$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 5$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

في جدول الحل الابتدائي يفترض أن الأرباح = صفر فهذا يعني أن قيمة X_1 , X_2 في القيود ستصبح صفر ولكن هذا يعطي خطأ رياضي في القيد الأول حيث ستصبح (3=0) وهذا غير صحيح رياضياً وايضا سيناقض شرط عدم السالبية في القيد الثاني حيث $(-S_1=10)$ أي أن S_1 قيمتها سالبة وهذا خطأ وللتغلب على هذه الأخطاء نضيف متغير

اصطناعي (R) إلى القيود التي تكون إشارتها اكبر من أو مساواة فتصبح القيود على الصورة

$-2X_1 + 3X_2 + R_1 = 3$

$4X_1 + 5X_2 - X_3 + R_2 = 10$

$X_1 + 2X_2 + X_4 = 5$

$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , R_1 , R_2 \geq 0$

استبدلنا المتغيرات S_1 , S_2 بالمتغيرات X_3 , X_4 وذلك لسهولة التعامل وتقليل عدد المتغيرات في النموذج نلاحظ هنا أننا أضفنا R_1 ,R_2 بعد توازن النموذج وهذا يخل بالتوازن ولتعديل هذا الاختلال نضيف R_1 , R_2 إلى دالة الهدف بعد ضربها في قيمة كبيرة جداً يرمز لها بالرمز (M) فتصبح دالة الهدف على الصورة

$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MR_1 + MR_2$

سنعوض بدل R_1 , R_2 في دالة الهدف من القيود وذلك لأنهما متغيرات اساسية في الحل فيجب أن لا تكون في دالة الهدف حيث

$R_1 = 3 + 2X_1 - 3X_2$

$R_2 = 10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3$

فتصبح دالة الهدف على الصورة

$Z = 2X_1 + 3X_2 + 0X_3 + 0X_4 + M(_3 + 2X_1 - 3X_2) + M(10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3)$

وبفك الاقواس وتجميع الحدود تصبح دالة الهدف في شكلها النهائي

$Z = (2 - 2M) X_1 + (3 - 8M) X_2 + MX_3 + 13M$

نضع المتغيرات في طرف والثوابت في طرف فتصبح

$Z + (-2 + 2M) X_1 + (-3 + 8M) X_2 - MX_3 = 13M$

نكون جدول الحل الابتدائي كالآتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Rato
R_1	-2	3	0	0	1	0	3	
R_2	4	5	-1	0	0	1	10	
X_4	1	2	0	1	0	0	5	
Z	-2+2M	-3+8M	-M	0	0	0	13M	

ولسهولة التعامل مع الجدول سنفترض قيمة عددية بدل M ولتكن (900) وبالتالي يصبح الجدول كالآتي:

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Rato
R_1	-2	3	0	0	1	0	3	1
R_2	4	5	-1	0	0	1	10	2
X_4	1	2	0	1	0	0	5	2.5
Z	1798	7197	-900	0	0	0	11700	

نحدد المتغير الداخل وهو صاحب اكبر معامل موجب في Z وبذلك يكون المتغير الداخل = X_2

أما المتغير الخارج فيكون صاحب أقل نسبة كما في الطريقة المبسطة العادية وهو R_1

$$\therefore \text{P.E} = \frac{-2,3,0,0,1,0,3}{3}$$

$$= -\frac{2}{3},1,0,0,\frac{1}{3},0,1$$

نجد القيم الجديدة لباقي المتغيرات

New $R_2 = 4 - (5)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3}$

$5 - (5)(1) = 0$

$-1 - (5)(0) = -1$

$0 - (5)(0) = 0$

$0 - (5)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{3}$

$1 - (5)\,0 = 1$

$10 - (5)\,1 = 5$

New $X_4 = 1 - (2)\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3}$

$2 - (2)(1) = 0$

$0 - (2)(0) = 0$

$1 - (2)(0) = 1$

$0 - (2)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

$0 - (2)(0) = 0$

$5 - (2)(1) = 3$

New Z = $1798 - 7197 \text{ x } -\frac{2}{3} = 6596$

$7197 - 7197 \text{ x } 1 = 0$

$-900 - 7197 \text{ x } 0 = -900$

$0 - 7197 \text{ x } 0 = 0$

$0 - 7197 \text{ x } \frac{1}{3} = -2399$

$0 - 7197 \text{ x } 0 = 0$

$11700 - 7197 \text{ x } 1 = 4503$

نكون الجدول الجديد من القيم الناتجة فيكون

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
X_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	
R_2	$\frac{22}{3}$	0	-1	0	$-\frac{5}{3}$	1	5	$\frac{15}{22}$
X_4	$\frac{7}{3}$	0	0	1	$-\frac{2}{3}$	0	3	$\frac{9}{7}$
Z	6596	0	-900	0	-2399	0	4503	

ينتهي الحل عندما تصبح جميع قيم Z سالبة أو صفرية

ولكن هناك قيم موجبة لذلك نكرر الخطوات السابقة

المتغير الداخل = X_1 ، المتغير الخارج = R_2

$$P.E = \frac{\frac{22}{3}\, 0,-1,0,-\frac{5}{3},1,5}{\frac{22}{3}}$$

$$= 1,0,-\frac{3}{22},0,-\frac{5}{22},\frac{3}{22},\frac{15}{22}$$

$$\text{New } X_2 = -\frac{2}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)(1) = 0$$

$$1-\left(-\frac{2}{3}\right)(0) = 1$$

$$0-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{3}{22}\right) = -\frac{1}{11}$$

$$0-\left(-\frac{2}{3}\right)(0) = 0$$

$$\frac{1}{3}-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{22}\right)=\frac{2}{11}$$

$$0-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{22}\right)=\frac{1}{11}$$

$$1-\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{15}{22}\right)=\frac{16}{11}$$

New $X_4 = \frac{7}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)(1) = 0$

$$0-\left(\frac{7}{3}\right)0 = 0$$

$$0-\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{-3}{22}\right)=\left(\frac{7}{22}\right)$$

$$1-\left(\frac{7}{3}\right)(0) = 1$$

$$-\frac{2}{3}-\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{-5}{22}\right)=\frac{-3}{22}$$

$$0-\left(\frac{7}{3}\right)\frac{3}{22}=-\frac{7}{22}$$

$$3-\left(\frac{7}{3}\right)\frac{15}{22}=\frac{31}{22}$$

New Z = 6596 – (6596) (1) = 0

0 – (6596) (0) = 0

-900 – (6596) $\left(\frac{-3}{22}\right)=\frac{-6}{11}$

0 – (6596) (0) = 0

$$-2399 - (6596)\left(\frac{-5}{22}\right) = \frac{^{-}9899}{11}$$

$$0 - (6596)\left(\frac{3}{22}\right) = \frac{-98911}{11}$$

$$4503 - (6596)\left(\frac{15}{22}\right) = \frac{63}{11}$$

نكون جدول الحل الجديد :

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
X_2	0	1	$\frac{-1}{11}$	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{16}{11}$	
X_1	1	0	$\frac{-3}{22}$	0	$\frac{-5}{22}$	$\frac{3}{22}$	$\frac{15}{22}$	
X_4	0	0	$\frac{7}{22}$	1	$\frac{-3}{22}$	$\frac{-7}{22}$	$\frac{31}{22}$	
Z	0	0	$\frac{-6}{11}$	0	$\frac{-9899}{11}$	$\frac{-9894}{11}$	$\frac{63}{11}$	

الحل الأمثل:

$$X_1 = \frac{15}{22} \quad , \quad X_2 = \frac{16}{11} \quad ، \quad Z = \frac{63}{11}$$

ملاحظة: نلاحظ هنا أن هناك قيمة سالبة لـ X_3 ومـع ذلـك توقفنـا عـن الحـل والسـبب في ذلـك أن معـاملات X_1 , X_2 في الجدول سالبة وهذا يزيد من قيمتها عند التحويل وبالتالي يزيد قيمة Z.

مثال:

حل النموذج التالي بالطريقة المبسطة

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 4X_2$$

s.t ,

$$2X_1 + 4X_2 \geq 8$$

$$5X_1 + 2X_2 \geq 10$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

نحول النموذج إلى الشكل القياسي

$$2X_1 + 4X_2 - X_3 + R_1 = 8$$

$$5X_1 + 2X_2 - X_4 + R_2 = 10$$

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 4X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MR_1 + MR_2$$

لكن

$$R_1 = 8 - 2X_1 - 4X_2 + X_3$$

$$R_2 = 10 - 5X_1 - 2X_2 + X_4$$

نعوضها في دالة الهدف Z :

$$Z = 5X_1+4X_2+0X_3+0X_4+M(8-2X_1-4X_2+X_3) + M(10-5X_1-2X_2+X_4)$$

$$Z = (5 - 7M_1)\ X_1 + (4 - 6M)\ X_2 + MX_3 + MX_4 + 18M$$

$$Z + (7M - 5)\ X_1 + (6M - 4)\ X_2 - MX_3 - MX_4 = 18M$$

نكون جدول الحل الابتدائي (نعوض M = 1000)

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
R_1	2	4	-1	0	1	0	8	4
R_2	5	2	0	-1	0	1	10	2
Z	6995	5996	-1000	-1000	0	0	18000	

المتغير الداخل = X_1 ، المتغير الخارج R_2

P.E = $\frac{5,2,0,-1,0,1,10}{5}$

$= 1,\frac{2}{5},0,\frac{-1}{5},0,\frac{1}{5},2$

New R_1 = 2 – (2) (1) = 0

$4 - (2)\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{16}{5}$

-1 – (2) (0) = -1

$0 - (2)\left(\frac{-1}{5}\right) = \frac{2}{5}$

1 – (2) (0) = 1

$0 - (2)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{-2}{5}$

8 – (2) (2) = 4

New Z = 6995 – (6995) (1) = 0

$5996 - (6995)\left(\frac{2}{5}\right) = 3198$

-1000 – (6995) (0) = -1000

$-1000 - (6995)\left(-\frac{1}{5}\right) = 399$

0 – (6995) (0) = 0

$0 - (6995)\left(\frac{1}{5}\right) = -1399$

18000 – (6995) (2) = 4010

جدول الحل الثاني :

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	RHS	Ratio
R_1	0	$\frac{16}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{-2}{5}$	4	$\frac{5}{4}$
X_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2	5
Z	0	3198	-1000	399	0	-1399	4010	

المتغير الداخل = X_2 ، والخارج = R_1

$$P.E = \frac{0, \frac{16}{5}, -1, \frac{2}{5}, 1, \frac{-2}{5}, 4}{\frac{16}{5}}$$

$$= 0, 1, \frac{-5}{16}, \frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{-1}{8}, \frac{5}{4}$$

$$\text{New } X_1 = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)(0) = 1$$

$$\frac{2}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)(1) = 0$$

$$0 - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-5}{16}\right) = \frac{1}{8}$$

$$\frac{-1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{-1}{4}$$

$$0 - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{16}\right) = \frac{-1}{8}$$

$$\frac{1}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{-1}{8}\right) = \frac{1}{4}$$

$$2-\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{2}$$

New Z = 0 – (3198) (0) = 0

3198 – (3198) (1) = 0

$$-1000-(3198)\left(-\frac{5}{16}\right)=\frac{-5}{8}$$

$$399-(3198)\left(\frac{1}{8}\right)=-\frac{3}{4}$$

$$0-(3198)\left(\frac{5}{16}\right)=-\frac{7995}{8}$$

$$-1399-(3198)\left(\frac{-1}{8}\right)=-\frac{3997}{4}$$

$$4010-(3198)\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{25}{2}$$

جدول الحل الثالث :

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{-5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{4}$
X_1	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
Z	0	0	$\frac{-5}{8}$	$\frac{-6}{8}$	$\frac{-7995}{8}$	$\frac{-3997}{4}$	$\frac{25}{2}$

∴ الحل الأمثل

$$X_1 = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{5}{4}$$

$$Z = \frac{25}{2}$$

ملاحظة: عند التعامل مع مسائل التعظيم (Maximization) فإننا نضرب قيم R في دالة الهدف في (M-).

مثال 3 :

أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بطريقة Big – M Technique.

$$Max\ Z = 3X_1 - X_2$$

Subject to,

$$X_1 - 2X_2 \geq 4$$

$$X_1 + X_2 \leq 8$$

$$X_1 \geq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: نحول القيود إلى الشكل القياسي:

$$X_1 - 2X_2 - X_3 + R_1 = 4$$

$$X_1 + X_2 + X_4 = 8$$

$$X_1 - X_5 + R_2 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, R_1, R_2 \geq 0$$

وبإضافة $-MR_1 - MR_2$ إلى دالة الهدف تصبح:

$$Z = 3X_1 - X_2 - MR_1 - MR_2$$

حيث: $R_1 = 4 - X_1 + 2X_2 + X_3$

$$R_2 = 4 - X_1 + X_5$$

وبالتعويض في حالة الهدف وتبسيطها تصبح:

$$Z = 3X_1 - X_2 - M (4 - X_1 + 2X_2 + X_3) - M (4 - X_1 + X_5)$$

$$= (3 + 2M) X_1 + (-1-2M) X_2 - MX_3 - MX_5 - 8M$$

$$Z - (3 + 2M) X_1 + (1 + 2M) X_2 + MX_3 + MX_5 = -8M$$

جدول الحل الإبتدائي ولتكن $M = 1000$:

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
R_1 ←	1	-2	-1	0	0	1	0	4	4
R_2	1	0	0	0	-1	0	1	4	4
X_4	1	1	0	1	0	0	0	8	8
Z	-2003	2001	1000	0	1000	0	0	-8000	

جدول "1"

المتغير الداخل X_1 (القيمة الأكثر سالبية في Z) والمتغير الخارج R_1.

$$P.E = \frac{(1,-2,-1,0,0,1.0.4)}{1} = (1, -2, -1, -1, 0, 0, 1, 0, 4)$$

New Z = -2003 , 2001 , 1000 , 0 , 1000 , 0 , 0 , -8000

+ (2003 , -4006 , -2003 , 0 , 0 , 2003 , 0 , 8012

= 0 , -2005 , -1003 , 0, 1000 , 2003 , 0 , 12

New R_2 =(1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 4) – (1, -2, -1, 0, 0, 1, 0, 4)

= (0, 2, 1, 0, -1, -1, 1, 0)

New X_4 = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 8) – (1, -2, -1, 0, 0, 1, 0, 4)

= (0, 3, 1, 1, 0, -1, 0, 4)

جدول الحل الثاني:

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
X_1	1	-2	-1	0	0	1	0	4	
R_2	0	2	1	0	-1	-1	1	0	0
X_4	0	3	1	1	0	1	0	4	$\frac{4}{3}$
Z	0	-2005	-1003	0	1000	2003	0	12	

جدول "2"

المتغير الداخل X_2 والمتغير الخارج R_2.

P.E = (0, 1, 1/2, 0, -1/2, -1/2, 1/2,0)

New Z = 0, -2005 , -1003 , 0 , 1000 , 2003 , 0 , 12

+ 0 , 2005 , 1002.5 , 0 , -1002.5 , 1002.5 , 0

0 , 0 , $\frac{-1}{2}$, 0 , -2.5 , 1000.5 , 1002.5 , 12

New X_1 =(1, -2, -1, 0, 0, 1, 0, 4) + (0, 2, 1, 0, -1, -1, 1, 0)

= (1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 4)

New X_4 = (0, 3, 1, 1, 0, -1, 0, 4) – (0, 3, 3/2, 0, -3/2, -3/2, 3/2, 0)

= (0, 0, -1/2, 1 , $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$, -3/2, 4)

جدول الحل الثاني:

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
X_1	1	0	0	0	-1	0	1	4	
X_2	0	1	1/2	0	-1/2	-1/2	1/2	0	
X_4	0	0	-1/2	1	3/2	$\frac{1}{2}$	-3/2	4	$\frac{8}{3}$
Z	0	0	-1/2	0	-5/2	1000.5	1002.5	12	

جدول "3"

المتغير الداخل X_5 والمتغير الخارج X_4.

Pivot equation = $(0, 0, -1/3, 2/3, 1, \frac{1}{3}, -1, 8/3)$

New Z = $(0, 0, -1/2, 0, -5/2, 1000.5, 1002.5, 12)$

$+ (0, 0, -5/6, 5/3, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}, -5/2, 20/3)$

$= (0, 0, -8/6, 5/3, 0, 1001.33, 1000, 56/3)$

New X_1 $=(1, 0, 0, 0, -1, 0, 1, 4) + (0, 0, -1/3, 2/3, 1, \frac{1}{3}, -1, 8/3)$

$= (1, 0, -1/3, 2/3, 0, \frac{1}{3}, 0, 20/3)$

New X_2 $= (0, 1, 1/2, 0, -1/2, -1/2, 1/2, 0)$

$+ (0, 0, -1/6, 1/3, 1/2, \frac{1}{6}, -1/2, 4/3)$

$= (0, 1, 1/3, 1/3, 0, -\frac{1}{3}, 0, 4/3)$

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	R_1	R_2	R.H.S
X_1	1	0	-1/3	2/3	0	$\frac{1}{3}$	0	20/3
X_2	0	1	1/3	1/3	0	-1/3	0	4/3
X_5	0	0	-1/3	2/3	1	$\frac{1}{3}$	-1	8/3
Z	0	0	-8/6	5/3	0	1001.33	1000	56/3

جدول "4"

ويكون الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 20/3$$

$$X_2 = 4/3$$

$$Z = 56/3$$

طريقة المرحلتين: Tow Phase Method

تستخدم هذه الطريقة كبديلة عن طريقة (م) الكبرى في مسائل التقليل وذلك بتعريف دالة هدف جديدة r تعتمد على المتغيرات الإصطناعية فقط (مجموع المتغيرات) وحتى يكون هناك حل للنموذج يجب أن نتوصل إلى قيمة (r = 0) وإلا فلا يوجد حل للنموذج.

وتكون هذه هي المرحلة الأولى، وإذا كان يوجد حل فإننا نكمل الحل وذلك بتعويض قيمة المتغيرات في دالة الهدف ومن ثم إيجادها.

مثال: في المثال الأول كان الشكل القياسي للقيود هو:

$$-2X_1 + 3X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 5X_2 - X_3 + R_2 = 10$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 5$$

نعرف دالة هدف جديدة هي:

$$r = R_1 + R_2$$

حيث

$$R_1 = (3 + 2X_1 - 3X_2)$$

$$R_2 = (10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3)$$

وبالتالي تكون (r) هي:

$$r = (3+2X_1 - 3X_2) + (10 - 4X_1 - 5X_2 + X_3)$$

$$= 13 - 2X_1 - 8X_2 + X_3$$

$$r + 2X_1 + 8X_2 - X_3 = 13$$

المرحلة الأولى في الحل وهي التأكد من وجود حل.

Basic	X_1	X_2 ↓	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
← R_1	-2	3	0	0	1	0	3	1
R_2	4	5	-1	0	0	1	10	2
X_4	1	2	0	1	0	0	5	2.5
r	2	8	-1	0	0	0	13	

جدول "1"

Pivot element = 3

Pivot equation = (-2/3, 1, 0, 0, 1/3, 0, 1)

New r = (2, 8, -1, 0, 0, 0, 13) – (-16/3, 8, 0, 0, 8/3, 0, 8)

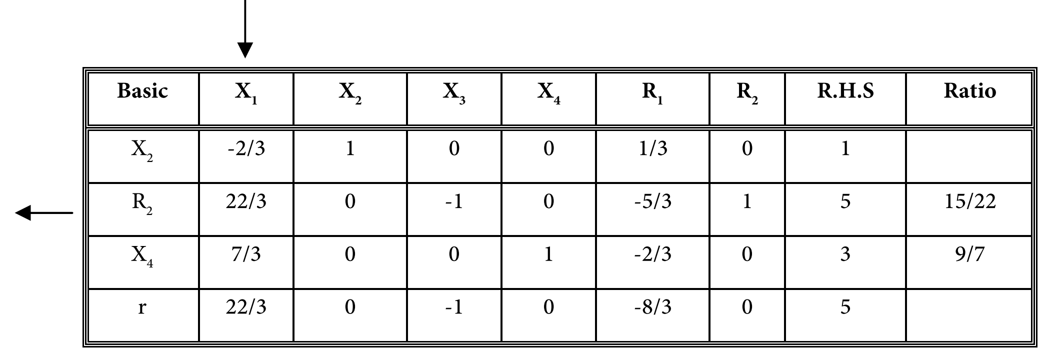
= (22/3, 0, -1, 0, -8/3, 0, 5)

New R_2 =(4, 5, -1, 0, 0, 1, 10) – (-10/3, 5, 0, 0, 5/3, 0, 5)

= (22/3, 0, -1, 0, -5/3, 1, 5)

New X_4 = (1, 2, 0, 1, 0, 0, 5) – (-4/3, 2, 0, 0, 2/3, 0, 2)

= (7/3, 0, 0, 1, -2/3, 0, 3)



Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
X_2	-2/3	1	0	0	1/3	0	1	
R_2	22/3	0	-1	0	-5/3	1	5	15/22
X_4	7/3	0	0	1	-2/3	0	3	9/7
r	22/3	0	-1	0	-8/3	0	5	

جدول "2"

المتغير الداخل X_1 والمتغير الخارج R_2.

Pivot element = 22/3

Pivot equation = (1, 0, -3/22, 0, -5/22, 3/22, 15/22)

New r = (22/3, 0, -1, 0, -8/3, 0, 5) – (22/3, 0, -1, 0, -5/3, 1, 5)

= (0, 0, 0, 0, -1, -1, 0)

New X_2 = (-2/3, 1, 0, 0, 1/3, 0, 1)

+ (2/3, 0, -2/22, 0, -10/66, 2/22, 10/22)

= (0, 1, -1/11, 0, 2/11, 1/11, 16/11)

New X_4 = (7/3, 0, 0, 1, -2/3, 0, 3)

– (7/3, 0, -7/22, 0, -35/66, 7/22, 35/22)

= (0, 0, 7/22, 1, -3/22, -7/22, 31/22)

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S
X_2	0	1	-1/11	0	2/11	1/11	16/11
X_1	1	0	-3/22	0	-5/22	3/22	15/22
X_4	0	0	7/22	1	-3/22	-7/22	31/22
r	0	0	0	0	-1	-1	0

جدول "3"

من الجدول أعلاه يظهر أن $r = 0$ وبالتالي يوجد حل وننتقل الآن إلى المرحلة الثانية: وتبدأ هذه المرحلة بحذف قيم R_1 , R_2 من جدول حل المرحلة الأولى وبالتالي تكون القيود كالتالي:

$$X_2 - 1/11\ X_3 = 16/11$$

$$X_1 - 3/22\ X_3 = 15/22$$

$$7/22\ X_3 + X_4 = 31/22$$

نجد من القيدين الأول والثاني أن المتغيرات الأساسية هي X_2 ,X_1 والمتغير غير الأساسي X_3، لذا نجد قسمة X_1، X_2 بدلالة X_3 كالآتي:

$$X_2 = 16/11 + 1/11\ X_3$$

$$X_1 = 15/22 + 3/22\ X_3$$

نرجع إلى دالة الهدف الأصلية $Z = 2X_1 + 3X_2$ ونعوض في قيمة X_2 , X_1 بدلالة X_3 فتصبح دالة الهدف:

$$Z = 3(16/11 + 1/11\ X_3) + 2\ (15/22 + 3/22\ X_3)$$

$$= 48/11 + 3/11\ X_3 + 30/22 + 6/22\ X_3$$

$$= 63/11 + 6/11\ X_3$$

$$Z - 6/11\ X_3 = 63/11$$

ويكون جدول الحل للمرحلة الثانية كما يلي:

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R.H.S
X_2	0	1	-1/11	0	16/11
X_1	1	0	-3/22	0	15/22
X_4	0	0	7/22	1	31/22
Z	0	0	-6/11	0	63/11

جدول "4"

Pivot element $= 7/22$

Pivot equation = (0, 0, 1, 22/7, 31/7)

New Z = (0, 0, -6/11, 0, 63/11) + (0, 0, 6/11, 12/7, 186/77)

= (0, 0, 0, 12/7, 57/7)

New X_2 =(0, 1, -1/11, 0, 16/11) + (0, 0, 1/11, 2/7, 31/77)

= (0, 1, 0, 2/7, 13/7)

New X_1 = (1, 0, -3/22, 0, 15/22) + (0, 0, 3/22, 3/7, 93/154)

= (1, 0, 0, 3/7, 9/7)

وبالتالي يكون جدول الحل الأمثل هو:

Basic	X_1	X_2	X_3	X_4	R.H.S
X_2	0	1	0	2/7	13/7
X_1	1	0	0	3/7	9/7
X_3	0	0	1	22/7	13/7
Z	0	0	0	12/7	57/7

جدول "5"

فيكون الحل الأمثل:

$X_1 = 9/7$

$X_2 = 13/7$

$Z = 57/7$

وهو نفس الحل الذي حصلنا عليه في طريقة (م) الكبرى.

مثال 2 :

لنأخذ نفس المثال الثاني في طريقة Big-M

Min $Z = 5X_1 + 4X_2$

s.t,

$2X_1 + 4X_2 \geq 8$

$5X_1 + 2X_2 \geq 10$

$X_1 , X_2 \geq 0$

الحل :

الشكل القياسي للقيود

$2X_1 + 4X_2 - X_3 + R_1 = 8$

$5X_1 + 2X_2 - X_4 + R_2 = 10$

$R_1 = 8 - 2X_1 - 4X_2 + X_3$

$R_2 = 10 - 5X_1 - 2X_2 + X_4$

$r = R_1 + R_2$

$= 18 - 7X_1 - 6X_2 + X_3 + X_4$

$\Rightarrow r + 7X_1 + 6X_2 - X_3 - X_4 = 18$

جدول الحل الابتدائي

B.V	X_1 ↓	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
R_1	2	4	-1	0	1	0	8	4
← R_2	5	2	0	-1	0	1	10	2
r	7	6	-1	-1	0	0	18	

المتغير الداخل X_1 ، والخارج = R_2

$$P.E = \frac{5,2,0,-1,0,1,10}{5}$$

$$= 1,\frac{2}{5},0,\frac{-1}{5},0,\frac{1}{5},2$$

New R_1 = 2 , 4 , -1 , 0 , 1 , 0 , 8

$$-2 , \frac{4}{5} , 0 , \frac{-2}{5} , 0 , \frac{2}{5} , 4$$

$$= 0 , \frac{16}{5} , -1 , \frac{2}{5} , 1 , \frac{-2}{5} , 4$$

New r = 7 , 6 , -1 , -1 , 0 , 0 , 18

$$7 , \frac{14}{5} , 0 , \frac{-7}{5} , 0 , \frac{7}{5} , 14$$

$$0 , \frac{16}{5} , -1 , \frac{2}{5} , 0 , \frac{-7}{5} , 4$$

جدول الحل الثاني

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S	Ratio
R_1	0	$\frac{16}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{-2}{5}$	4	$\frac{5}{4}$
X_1	1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2	5
r	0	$\frac{16}{5}$	-1	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{-7}{5}$	4	

المتغير الداخل = X_2 والخارج R_1

$$\text{P.E} = \frac{0,\frac{16}{5},-1,\frac{2}{5},1,\frac{-2}{5},4}{\frac{16}{5}}$$

$$= 0,1,\frac{-5}{16},\frac{1}{8},\frac{5}{16},\frac{-1}{8},\frac{5}{4}$$

New X1 = $1\ ,\ \frac{2}{5}\ ,\ 0\ ,\ \frac{-1}{5}\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ 2$

$$0\ ,\ \frac{2}{5},\frac{-1}{8},\frac{1}{20},\frac{1}{8},\frac{-1}{20},\frac{1}{2}$$

$$= 1\ ,\ 0\ ,\ \frac{1}{8},\frac{-1}{4},\frac{-1}{8},\frac{1}{4},\frac{3}{2}$$

New r = $0\ ,\ \frac{16}{5}\ ,\ -1\ ,\ \frac{2}{5}\ ,\ 0\ ,\ \frac{-7}{5}\ ,\ 4$

$$-\ 0\ ,\ \frac{16}{5}\ ,\ -1\ ,\ \frac{2}{5}\ ,\ 1\ ,\ \frac{-2}{5}\ ,\ 4$$

---

0 , 0 , 0 , 0 , -1 , -1 , 0

جدول الحل الثالث :

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{-5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{5}{4}$
X_1	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
R	0	0	0	0	-1	-1	0

المرحلة الثانية :

$$X_2 = \frac{5}{16}X_3 + \frac{1}{8}X_4 = \frac{5}{4}$$

$$X_1 = \frac{1}{8}X_3 - \frac{1}{4}X_4 = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{16}X_3 - \frac{1}{8}X_4$$

$$X_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{8}X_3 + \frac{1}{4}X_4$$

Z = 5X1 + 4X2

$$= 5\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{8}X_3 + \frac{1}{4}X_4\right) + 4\left(\frac{5}{4} + \frac{5}{16}X_3 - \frac{1}{8}X_4\right)$$

$$= \frac{15}{2} - \frac{5}{8}X_3 + \frac{5}{4}X_4 + 5 + \frac{5}{4}X_3 - \frac{1}{2}X_4$$

$$= \frac{25}{2} + \frac{5}{8}X_3 + \frac{3}{4}X_4$$

$$Z - \frac{5}{8}X_3 - \frac{3}{4}X_4 = \frac{25}{2}$$

جدول الحل في المرحلة الثانية

	X_1	X_2	X_3	X_4	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{-5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{4}$
X_1	1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{3}{2}$
Z	0	0	$\frac{-5}{8}$	$\frac{-3}{4}$	$\frac{25}{2}$

∴ يكون الحل الأمثل

$$X_1 = \frac{3}{2}$$

$$X_2 = \frac{5}{4}$$

$$Z = \frac{25}{2}$$

الحالات الخاصة في الطريقة المبسطة

1- التكرار (التفسخ) Degeneracy

تنتج هذه الحالة عندما تتساوي النسب الأقل في تحويل المتغير الخارج وفي هذه الحالة نأخذ أي نسبة فيهما وعند التبديل يكون قيمة المتغير الاخر صفر وبالتالي لا تغير في الحال عند التبديل الاخر.

مثال :

حل المثال التالي باستخدام الطريقة المبسطة

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 4X_2$$

s.t ,

$$-X_1 + X_2 \leq 5$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 15$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

$$-X_2 + X_2 + S_1 = 5$$

$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 15$$

$$Z - 3X_1 - 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

ويكون جدول الحل الابتدائي هو :

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
S_1	-1	1	1	0	5	5
S_2	1	3	0	1	15	5
Z	-3	-4	0	0	0	

يكون المتغير الداخل = X_2 وعند حساب المتغير الخارج تتساوى النسب وبالتالي نأخذ احداهما وليكن S_1

يكون جدول الحل الثاني هي :

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
X_2	-1	1	1	0	5	
S_2	4	0	-3	1	0	
Z	-7	0	4	0	20	

نلاحظ هنا أن الحل لم ينتهي ولكن هناك متغير أساسي قيمته صفر وهي S2 وعند التبديل في الجدول الثالث يتغير الحل

جدول الحل الثالث

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	5
X_1	1	0	$\frac{-3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
Z	0	0	$\frac{-5}{4}$	$\frac{7}{4}$	20

لا يتغير الحل بين الجدول الثاني والثالث ويكون الحل الامثل

$X_1 = 0$, $X_2 = 5$, $Z = 20$

2- الحل البديل : Alterative Solution

يكون هناك اكثر من حل أمثل بحيث تكون قيمة Z نفسها ولكن قيم X_1 , X_2 مختلفة

مثال: حل النموذج التالي بالطريقة المبسطة

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$

s.t,

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$X_1 + X_2 \leq 4$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل : الشكل القياسي للنموذج :

$$X_1 + 2X_2 + S_1 = 5$$

$$X_1 + X_2 + S_2 = 4$$

$$X_1 , X_2 , S_1 , S_2 \geq 0$$

$$Z - 2X_1 - 4X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

جدول الحل الابتدائي

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
S_1	1	2	1	0	5	$\frac{5}{2}$
S_2	1	1	0	1	4	4
Z	-2	-4	0	0	0	

المتغير الداخل = X_2 ، الخارج = S_1

جدول الحل الثاني

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
X_2	0.5	1	0.5	0	2.5	5
S_2	0.5	0	-0.5	1	1.5	3
Z	0	0	2	0	10	

اصبحت جميع قيم المتغيرات في Z موجبة أو صفر ولكن قيمة X2 هي صفر في دالة الهدف وهذا يدل على حل بديل، حيث المتغير الداخل = X1 ، والخارج = S2

B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_2	0	1	1	-1	1
X_1	1	0	-1	2	3
Z	0	0	2	0	10

وهناك يكون حلين للنموذج

الحل الأول :

$X_1 = 0$

$X_2 = 5$

$Z = 10$

الحل البديل :

$X_1 = 3$

$X_2 = 1$

$Z = 10$

3- حل غير محدد Un bounded Solution

في هذه الحالة يكون للنموذج حل اذا كانت دالة الهدف Min لكن لا يوجد حل اذا كانت Max

مثال: حل النموذج التالي بالطريقة المبسطة

$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$

s.t,

$X_1 - X_2 \leq 10$

$2X_1 \leq 40$

$X_1, X_2 \geq 0$

الحل :

الشكل القياسي للنموذج

$X_1 - X_2 + S_1 = 10$

$2X_1 + S_2 = 40$

$Z - 2X_1 - 3X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$

جدول الحل الابتدائي

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S	Ratio
S_1	1	-1	1	0	10	
S_2	2	0	0	1	40	
Z	-2	-3	0	0	0	

يكون المتغير الداخل X_2 ولكن لا تستطيع تحديد المتغير الخارج وبالتالي نقول أنه لا يوجد حل للنموذج .

4- عدم وجود حل : Infeasible Solution

لا نستطيع ايجاد حل أمثل للنموذج بغض النظر عن دالة الهدف

مثال:

$$\text{Min } Z = 2X_1 + 3X_2$$

s.t,

$$\frac{5}{2}X_1 + 2X_2 \leq 5$$

$$5X_1 + 4X_2 \geq 20$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل: الشكل القياسي للنموذج

$$\frac{5}{2}X_1 + 2X_2 + X_3 = 5$$

$$5X_1 + 4X_2 - X_4 + R = 20$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R \geq 0$$

$$2 + (5M - 2)X_1 + (4M - 3)X_2 - MX_4 = 20M$$

جدول الحل الابتدائي

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R	R.H.S	Ratio
X_3	2.5	2	1	0	0	5	2
R	5	4	0	-1	1	20	4
Z	5M-2	4M-3	0	-M	0	20M	

المتغير الداخل = X_1 ، المتغير الخارج = X_3

الجدول الثاني

B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R	R.H.S
X_1	1	0.8	0.4	0	0	2
R	0	0	-2	-1	1	10
Z	0	-1.4	-2M+0.8	-M	0	10M+4

نلاحظ هنا أن الحل انتهي ولكن قيمة يوجد هناك قيمة لـ Z حيث قيمة Z تعتمد على قيمة M

∴ لا يوجد حل للنموذج

تطبيقات الحاسوب

تطبيقات الطريقة المبسطة باستخدام برمجة إكسل Excel

لشرح حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة المبسطة باستخدام برمجية إكسل نأخذ المثال التالي ونوضح من خلاله

مثال :

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 5X_2$$

s.t,

$$X_1 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 12$$

$$3X_1 + 2X_2 \leq 18$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل:

نفرغ النموذج في البداية في ورقة عمل إكسل كما في الجدول التالي

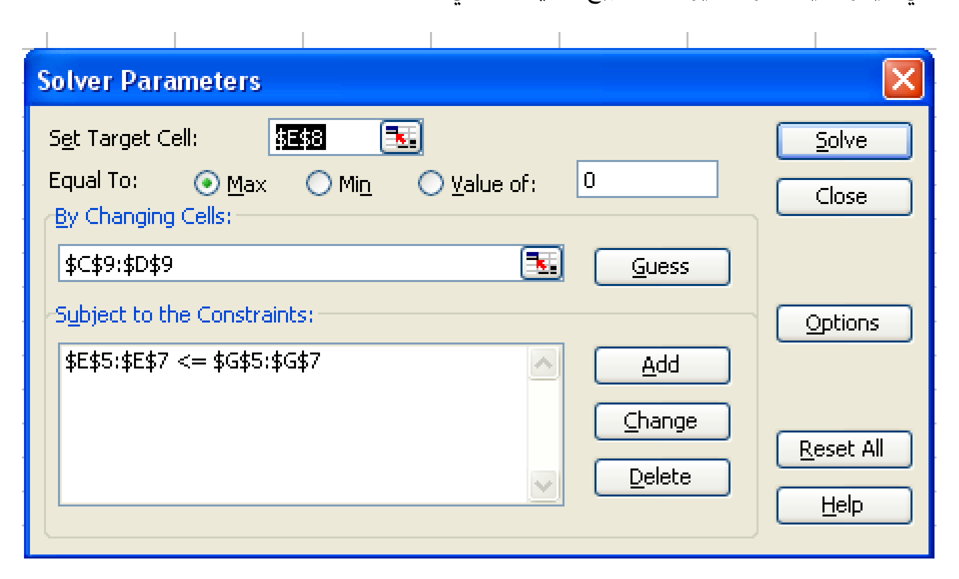
B	C	D	E	F	G
	Hours doors	Units windows	Total		Hours available
Plant 1	1	0	0	≤	4
Plant 2	0	2	0	≤	12
Plant 3	3	2	0	≤	18
Unit product	3	5	0		
Solution	0	0			

هذا الجدول يشبه جدول الحل حيث يمثل العمود الأول (B) اسماء القيود ودالة الهدف، العمود الثاني (C) معاملات المتغير الأول، العمود الثالث (D) معاملات المتغير الثاني، أما العمود الرابع (E) قاعدة الحل للنموذج حيث في كل خانة تضع القاعدة التالية:

معاملات القيد الأول C5 : D5 أي في الصف الخامس في ورقة العمل.

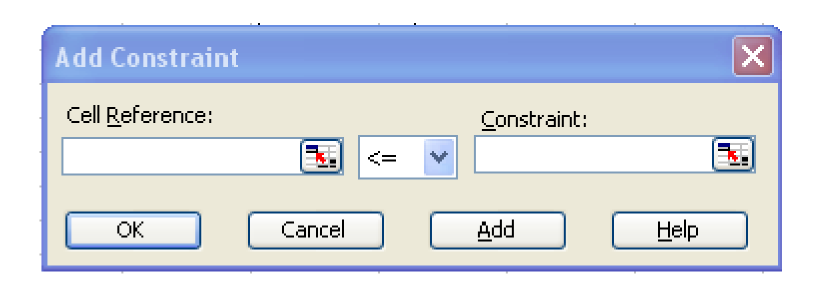
وفي صف الحلول (C5 : D5 ; C9 : D9) Sum Product

والعمود الخامس (F) نضع من اشارات القيود واخيراً العمود السادس (G) يكون فيه الطرف الأيمن من القيد تكون القيود في الصفوف 5 , 6 , 7 ثم الصف الثامن دالة الهدف والصف الأخير والتاسع حلول القيود . ثم الخطوة التالية وهي عملية الحل حيث نختار من قائمة ادوات Tools الامر Solver واذا لم يكن موجود نضيفه عن طريق الامر Add-Ins من نفس القائمة وعند الضغط تظهر لنا الشاشة في الشكل رقم (1) حيث نضع في المربع الأول (Set target cell) رقم الخلية التي سيظهر فيها قيمة Z في الحل وهي (E8) ثم نضع في المربع By changing calls الخلايا التي سيكون فيها حلول القيود، أما المربع الأخير والمسمي Subject to the Constraints



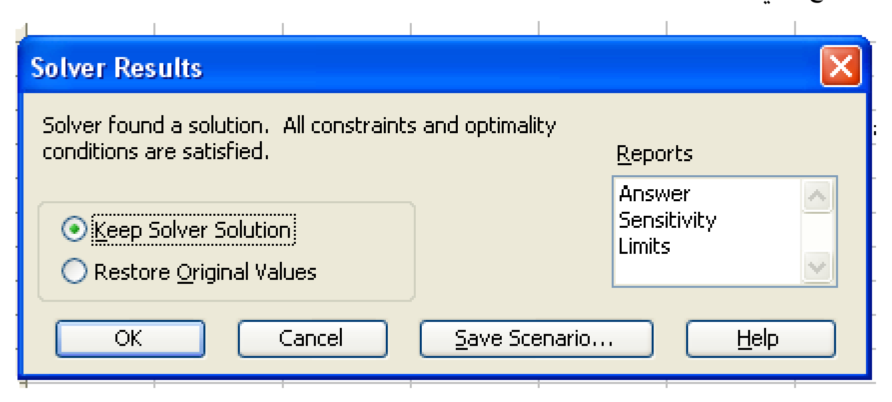
شكل رقم 1

فنضع فيه معاملات القيود والثوابت وذلك عن طريق الامر add بجانبه حيث يظهر الشكل رقم (2) عند الضغط عليه



شكل رقم 2

فنضع في المربع الاول (Cell Reference) خلايا معاملات القيود وفي المربع الثاني ثوابت القيد Constraint ثـم ok ، فتظهر في المربع في الشكل الأول، ثم نضغط على الأمر option لنختار من المربع الناتج الخيارات Assume Linear Model والخيـار Assume Non-Negative لـنظللهما ثـم ok لنعـود إلى الشـكل الأول فنضـغط عـلى الامـر solve ليظهر لنا المربع التالي



شكل رقم 3

فنظلل الخيار keep solver solution كما في الشكل (3) ثم ok

يتم الحل ويظهر لنا جدول الحل النهائي كما في الشكل التالي :

نموذج برمجة خطية باستخدام الطريقة المبسطة على الاكسل

B	C	D	E	F	G
	Hours doors	Units windows	Total		Hours available
Plant 1	1	0	2	≤	4
Plant 2	0	2	12	≤	12
Plant 3	3	2	18	≤	18
Unit product	3	5	36	≤	
Solution	2	6			

ليظهر لدينا قيمة $X_1=2$ وقيمة $X_2=6$ وقيمة $Z=36$

تطبيقات الأمثلة السابقة باستخدام برنامج TORA

سنطبق على هذا البرنامج الأمثلة التالية :

المثال الأول والثاني والثالث بالطريقة المبسطة

والمثال الأول والثاني بطريقة م- الكبرى مع ملاحظة أن في هذا التطبيق لابد من وضع قيمة عددية لـ M والمثال الأول بطريقة المرحلتين كما في الصفحات التالية.

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:03

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q5

	x1	x2		
Maximize	80.00	45.00		
Subject to				
(1)	20.00	5.00	<=	400.00
(2)	15.00	10.00	<=	450.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (Starting All-Slack Method)

Title: q5

Iteration 1					
Basic	x1	x2	sx3	sx4	Solution
z (max)	-80.00	-45.00	0.00	0.00	0.00
sx3	20.00	5.00	1.00	0.00	400.00
sx4	15.00	10.00	0.00	1.00	450.00
Lower Bound	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n			

Iteration 2					
Basic	x1	x2	sx3	sx4	Solution
z (max)	0.00	-25.00	4.00	0.00	1600.00
x1	1.00	0.25	0.05	0.00	20.00
sx4	0.00	6.25	-0.75	1.00	150.00
Lower Bound	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n			

Iteration 3					
Basic	x1	x2	sx3	sx4	Solution
z (max)	0.00	0.00	1.00	4.00	2200.00
x1	1.00	0.00	0.08	-0.04	14.00
x2	0.00	1.00	-0.12	0.16	24.00
Lower Bound	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n			

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:04

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q6

	x1	x2	x3		
Maximize	5.00	7.00	8.00		
Subject to					
(1)	3.00	2.00	4.00	<=	80.00
(2)	1.00	5.00	1.00	<=	70.00
(3)	5.00	4.00	6.00	<=	90.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (Starting All-Slack Method)

Title: q6

Iteration 1

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	-5.00	-7.00	-8.00	0.00	0.00	0.00
sx4	3.00	2.00	4.00	1.00	0.00	0.00
sx5	1.00	5.00	1.00	0.00	1.00	0.00
sx6	5.00	4.00	6.00	0.00	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.00
sx4	80.00
sx5	70.00
sx6	90.00

Iteration 2

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	1.67	-1.67	0.00	0.00	0.00	1.33
sx4	-0.33	-0.67	0.00	1.00	0.00	-0.67
sx5	0.17	4.33	0.00	0.00	1.00	-0.17
x3	0.83	0.67	1.00	0.00	0.00	0.17
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	120.00
sx4	20.00
sx5	55.00
x3	15.00

Iteration 3

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	1.73	0.00	0.00	0.00	0.38	1.27
sx4	-0.31	0.00	0.00	1.00	0.15	-0.69
x2	0.04	1.00	0.00	0.00	0.23	-0.04
x3	0.81	0.00	1.00	0.00	-0.15	0.19
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	141.15
sx4	28.46
x2	12.69
x3	6.54

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:05

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q7

	x1	x2	x3		
Maximize	15.00	12.00	14.00		
Subject to					
(1)	1.00	1.00	1.00	<=	100.00
(2)	10.00	4.00	5.00	<=	600.00
(3)	2.00	2.00	6.00	<=	300.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (Starting All-Slack Method)

Title: q7

Iteration 1						
Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	-15.00	-12.00	-14.00	0.00	0.00	0.00
sx4	1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	0.00
sx5	10.00	4.00	5.00	0.00	1.00	0.00
sx6	2.00	2.00	6.00	0.00	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.00
sx4	100.00
sx5	600.00
sx6	300.00

Iteration 2						
Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	-6.00	-6.50	0.00	1.50	0.00
sx4	0.00	0.60	0.50	1.00	-0.10	0.00
x1	1.00	0.40	0.50	0.00	0.10	0.00
sx6	0.00	1.20	5.00	0.00	-0.20	1.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	900.00
sx4	40.00
x1	60.00
sx6	180.00

Iteration 3						
Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	-4.44	0.00	0.00	1.24	1.30
sx4	0.00	0.48	0.00	1.00	-0.08	-0.10
x1	1.00	0.28	0.00	0.00	0.12	-0.10
x3	0.00	0.24	1.00	0.00	-0.04	0.20
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	1134.00
sx4	22.00
x1	42.00
x3	36.00

Iteration 4						
Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	0.00	0.00	9.25	0.50	0.38
x2	0.00	1.00	0.00	2.08	-0.17	-0.21
x1	1.00	0.00	0.00	-0.58	0.17	-0.04
x3	0.00	0.00	1.00	-0.50	0.00	0.25
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	1337.50
x2	45.83
x1	29.17
x3	25.00

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:06

LINEAR PROGRAM – ORIGINAL DATA

Title: q8

	x1	x2		
Minimize	2.00	3.00		
Subject to				
(1)	-2.00	3.00	=	3.00
(2)	4.00	5.00	>=	10.00
(3)	1.00	2.00	<=	5.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (M-Method)

Title: q8

Iteration 1

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4	Rx5	sx6
z (min)	1998.00	7997.00	-1000.00	0.00	0.00	0.00
Rx4	-2.00	3.00	0.00	1.00	0.00	0.00
Rx5	4.00	5.00	-1.00	0.00	1.00	0.00
sx6	1.00	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	13000.00
Rx4	3.00
Rx5	10.00
sx6	5.00

Iteration 2

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4	Rx5	sx6
z (min)	7329.33	0.00	-1000.00	-2665.67	0.00	0.00
x2	-0.67	1.00	0.00	0.33	0.00	0.00
Rx5	7.33	0.00	-1.00	-1.67	1.00	0.00
sx6	2.33	0.00	0.00	-0.67	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	5003.00
x2	1.00
Rx5	5.00
sx6	3.00

Iteration 3

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4	Rx5	sx6
z (min)	0.00	0.00	-0.55	-999.91	-999.45	0.00
x2	0.00	1.00	-0.09	0.18	0.09	0.00
x1	1.00	0.00	-0.14	-0.23	0.14	0.00
sx6	0.00	0.00	0.32	-0.14	-0.32	1.00
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	5.73
x2	1.45
x1	0.68
sx6	1.41

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:10

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q9

	x1	x2		
Minimize	5.00	4.00		
Subject to				
(1)	2.00	4.00	>=	8.00
(2)	5.00	2.00	>=	10.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (M-Method)

Title: q9

Iteration 1 Basic	x1	x2	Sx3	Sx4	Rx5	Rx6
z (min)	695.00	596.00	-100.00	-100.00	0.00	0.00
Rx5	2.00	4.00	-1.00	0.00	1.00	0.00
Rx6	5.00	2.00	0.00	-1.00	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	1800.00
Rx5	8.00
Rx6	10.00

Iteration 2 Basic	x1	x2	Sx3	Sx4	Rx5	Rx6
z (min)	0.00	318.00	-100.00	39.00	0.00	-139.00
Rx5	0.00	3.20	-1.00	0.40	1.00	-0.40
x1	1.00	0.40	0.00	-0.20	0.00	0.20
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	410.00
Rx5	4.00
x1	2.00

Iteration 3 Basic	x1	x2	Sx3	Sx4	Rx5	Rx6
z (min)	0.00	0.00	-0.63	-0.75	-99.38	-99.25
x2	0.00	1.00	-0.31	0.13	0.31	-0.13
x1	1.00	0.00	0.13	-0.25	-0.13	0.25
Lower Bound	0.00	0.00				
Upper Bound	infinity	infinity				
Unrestr'd (y/n)?	n	n				

Basic	Solution
z (min)	12.50
x2	1.25
x1	1.50

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

Thursday, April 03, 2008 23:13

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: q8

	x1	x2		
Minimize	2.00	3.00		
Subject to				
(1)	-2.00	3.00	=	3.00
(2)	4.00	5.00	>=	10.00
(3)	1.00	2.00	<=	5.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (Two-Phase Method)

Title: q8

Phase 1 (Iter 1

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4
z (min)	2.00	8.00	-1.00	0.00
Rx4	-2.00	3.00	0.00	1.00
Rx5	4.00	5.00	-1.00	0.00
sx6	1.00	2.00	0.00	0.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Basic	Rx5	sx6	Solution
z (min)	0.00	0.00	13.00
Rx4	0.00	0.00	3.00
Rx5	1.00	0.00	10.00
sx6	0.00	1.00	5.00

Phase 1 (Iter 2

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4
z (min)	7.33	0.00	-1.00	-2.67
x2	-0.67	1.00	0.00	0.33
Rx5	7.33	0.00	-1.00	-1.67
sx6	2.33	0.00	0.00	-0.67
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Basic	Rx5	sx6	Solution
z (min)	0.00	0.00	5.00
x2	0.00	0.00	1.00
Rx5	1.00	0.00	5.00
sx6	0.00	1.00	3.00

Phase 1 (Iter 3

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4
z (min)	0.00	0.00	0.00	-1.00
x2	0.00	1.00	-0.09	0.18
x1	1.00	0.00	-0.14	-0.23
sx6	0.00	0.00	0.32	-0.14
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Basic	Rx5	sx6	Solution
z (min)	-1.00	0.00	0.00
x2	0.09	0.00	1.45
x1	0.14	0.00	0.68
sx6	-0.32	1.00	1.41

Phase 2 (Iter 4

Basic	x1	x2	Sx3	Rx4
z (min)	0.00	0.00	-0.55	blocked
x2	0.00	1.00	-0.09	0.18
x1	1.00	0.00	-0.14	-0.23
sx6	0.00	0.00	0.32	-0.14
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		

Basic	Rx5	sx6	Solution
z (min)	blocked	0.00	5.73
x2	0.09	0.00	1.45
x1	0.14	0.00	0.68
sx6	-0.32	1.00	1.41

تمارين

س1: شركة صناعية كبرى ترغب في تحديد عدد الوحدات الواجب إنتاجها من السلع C, B, A بما يحقق الحد الأقصى من الأرباح، وتمتلك الشركة الآلات 1, 2, 3, 4 والجدول التالي يعطي الوقت المستغرق لكل سلعة على كل آلة، وكذلك يعطي الوقت المتاح لكل آلة.

الآلات	السلع			ساعة/ أسبوعياً الوقت المتاح
	A	B	C	
1	3	0	5	60
2	0	2	1	65
3	2	1	0	40
4	1	5	1	55

إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من السلع A, B, C هي على التوالي 6, 7, 9 دينار.

أكتب نموذج برمجة خطية يحقق رغبة الشركة.

س2: تقوم إحدى شركات السجاد بإنتاج نوعين من السجاد هما B, A ويمر كل نوع من السجاد بثلاث مراحل هي:

1. مرحلة تقطيع أطوال السجاد بعد إنتاجها في قسم آخر من الشركة.
2. مرحلة طي الأطوال على شكل لفات.
3. مرحلة التغليف بمواد معينة لغرض بيعها في الأسواق.

والجدول التالي يوضح البيانات الخاصة بالمسألة:

مراحل الإنتاج	أنواع السجاد		الوقت المتاح/ دقيقة
	A	B	
التقطيع	8	6	2200
الطي	4	4	1100
التغليف	1	2	400

تمثل البيانات في الجدول أعلاه التفصيلات الفنية للمنتجين B, A فمثلاً لإنتاج وحدة واحدة من المنتج A نحتاج إلى 8 دقائق لإجراء عملية التقطيع 4 دقائق لإجراء عملية الطي، دقيقة واحة لإجراء عملية التغليف. أما الوقت المتاح في عمليات التقطيع هو 2200 دقيقة وفي عمليات الطي 1800 دقيقة وفي عمليات التغليف 400 دقيقة. إذا علمت أن الربح المتوقع عند بيع وحدة واحدة من النوع A يساوي 12 دينار ومن النوع B يساوي 8 دنانير.

أكتب نموذج البرمجة الخطية بحيث تكون الأرباح الناجمة عن عملية الإنتاج أكبر ما يمكن، ثم حله بطريقة الرسم البياني .

س3: تقوم إحدى الشركات بإنتاج أنواع مختلفة من مساحيق الغسيل فإذا وردت إلى الشركة طلبية للحصول على 12000 كيلو غرام من مسحوق معين.

يتكون المسحوق من ثلاث مركبات هي C, B, A والمواصفات المطلوبة لذلك المسحوق كما وردت في الطلبية مبينة كما يلي:

1. يجب أن يحتوي المسحوق على الأقل 3000 كيلو غرام من المركب B.

2. يجب أن لا يحتوي المسحوق على أكثر من 4000 كيلو غراماً من المركب A.

3. يجب أن يحتوي المسحوق على الأقل 2000 كيلوغرام من المركب C.

إذا علمت أن كلفة الكيلوغرام من المركب A تساوي 2 دينار، وكلفة الكيلوغرام من المركب B تساوي 3 دنانير، وكلفة الكيلوغرام من المركب C تساوي 4 دينار.

أكتب صيغة البرمجة الخطية والذي يعطي أقل التكاليف.

س4: ترغب وزارة الزراعة – مديرية الثروة الحيوانية – وضع برنامج خاص لإنتاج العلف الحيواني، وقد تقرر القيام بإنتاج نوعين من أنواع العلف، كل نوع يتكون من مزيج من المواد الغذائية والتي تطحن في مطاحن خاصة لتصبح جاهزة للإستعمال.

إذا كان تكلفة الوحدة الواحدة للنوع الأول من العلف تساوي 41 دينار، وللنوع الثاني 35 دينار بالإعتماد على هذه المعلومات، وعلى المعلومات الواردة في الجدول أدناه، جد الكمية اللازمة من كل نوع من أنواع العلف لتكون التكلفة أقل ما يمكن بالطريقة المبسطة والرسم البياني.

نوع المادة في تركيبة العلف	نوع العلف		الإحتياجات الأسبوعية/ كغم
	A	B	
I	2	3	1250
II	1	1	250
III	5	3	900
IV	0.6	0.25	232.5

س5: مؤسسة صناعية تقوم بإنتاج علب معدنية تستخدم لأغراض تعليب المواد الغذائية. وردت إلى المصنع طلبية بالحاجة إلى أربع أنواع (أشكال) من العلب D, C, B,A .

درست المؤسسة الطلبية وأجرت إختباراتها الأولية لكي تتخذ قرارها حول تحديد إمكانية إنتاج الأنواع الأربعة ليحقق أعلى الأرباح. توفرت للمؤسسة المعلومات والبيانات التالية:

إن كل نوع يجب أن يمر خلال مراحله التصنيعية على أربع مكائن:

الماكنة الأولى: تقوم بتقطيع الصفائح بالقياسات التي تخص كل نوع من الأنواع.

الماكنة الثانية: تقوم بطي الصفائح المقطعة.

الماكنة الثالثة: تقوم بلحام ووصل القطع المختلفة لكي تتخذ الشكل المطلوب.

الماكنة الرابعة: تقوم بالصباغة والطباعة على العلب.

الجدول التالي يبين الزمن اللازم لإنتاج كل نوع من الأنواع الأربعة عند مروره بمراحل التصنيع على المكائن الأربعة، كما يبين الطاقة التشغيلية القصوى بالساعات في اليوم الواحد لكل ماكنة، كما يبين الجدول الربح الذي يتحقق من إنتاج كل نوع من الأنواع الأربعة.

المكائن	**أنواع العلب**				**الطاقة التشغيلية**
	A	**B**	**C**	**D**	
الماكنة الأولى	1	2	1	1	8
الماكنة الثانية	3	1	2	3	9
الماكنة الثالثة	1	3	3	3	6
الماكنة الرابعة	2	-	2	-	4
الربح بالدينار	2	1	4	5	

ملاحظة: أن الرمز (-) في الجدول يعني أن النوع B والنوع D لا يمران بالماكنة الرابعة.

أكتب نموذج برمجة خطية لهذه المسألة بحيث يحقق أقصى ربح ممكن. ثم حله باستخدام برمجية إكسل Excel .

س6: أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بطريقة الرسم البياني.

$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$

Subject to,

$4X_1 + 3X_2 \leq 12$

$-X_1 + X_2 \geq 1$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س7: أوجد الحل الأمثل للنموذج في السؤال السابق إذا كانت دالة الهدف:

$\text{Min } Z = 5X_1 + 3X_2$

س8: أوجد الحل الأمثل للنموذج التالي بيانياً.

$\text{Max } Z = 5X_1 + 2X_2$

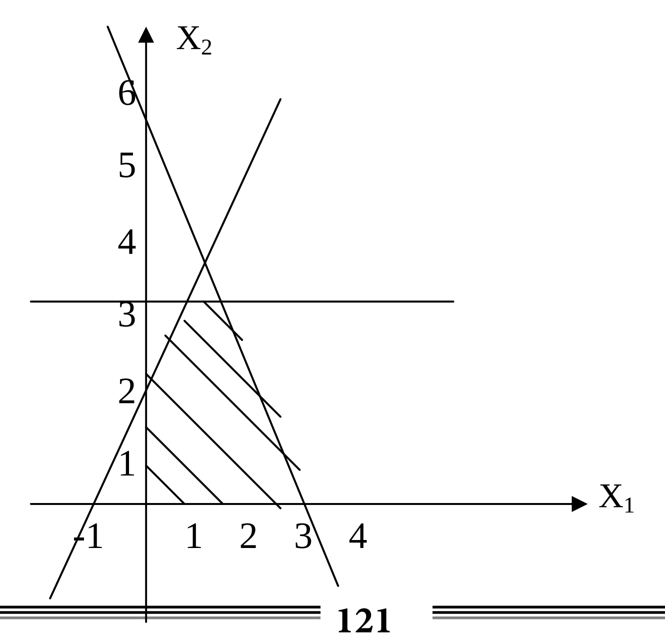
Subject to,

$X_1 + X_2 \leq 10$

$X_1 \geq 5$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س9: أوجد الحل الأمثل للشكل التالي حسب دالة الهدف المعطى لاحقاً.



أ. $Max\ Z = 2X_1 + X_2$

ب. $Max\ Z = 5X_1 + 3X_2$

ج. $Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$

د. $Min\ Z = X_1 + X_2$

س10: ما هي القيود التي تمثل الرسم في السؤال التاسع.

س11: تقوم شركة لصناعة الحقائب الجلدية بإنتاج ثلاثة أنواع من الحقائب، وتمر كل من هذه الحقائب بثلاث مراحل إنتاجية C, B, A والجدول التالي يوضح الوقت اللازم لكل مرحلة من المراحل وسعر بيع القطعة الواحدة من كل نوع من الحقائب.

نوع الحقيبة	ربح القطعة بالدينار	الوقت اللازم لكل مرحلة		
		A	B	C
حقيبة سفر	25	9	4	18
حقيبة يد	17	18	3	3
حقيبة مدرسية	10	2	12	2

والوقت المتاح للإنتاج في اليوم لكل مرحلة هو كالآتي المرحلة A هو 1200 دقيقة المرحلة B هو 1400 دقيقة، المرحلة C هو 1010 دقيقة، والمطلوب:

أ. تشكيل نموذج البرمجة الخطية.

ب. حل النموذج بالطريقة المبسطة Simplex Method.

س12: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة Simplex Method:

أ. $Max\ Z\ 16X_1 + 15X_2$

Subject to,

$40X_1 + 31X_2 \leq 124$

$-X_1 + X_2 \leq 14$

$X_1 , X_2 \geq 0$

ب. $Max\ Z = 3X_1 + 6X_2$

Subject to,

$3X_1 + 5X_2 \leq 12$

$5X_1 + 6X_2 \leq 14$

$X_1 , X_2 \geq 0$

ج. $Max\ Z = 8X_1 + 9X_2 + 5X_3$

Subject to,

$X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 2$

$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 3$

$6X_1 + 6X_2 + 2X_3 \leq 9$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

س13: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بطريقة (م) الكبرى:

أ. $Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to,

$X_1 + X_2 \geq 2$

$2X_1 + 3X_2 \leq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

ب. $\text{Min } Z = X_1 + 2X_2 + 4X_3$

Subject to,

$X_1 + 3X_2 + X_3 \geq 1$

$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 5$

$X_1 + 2X_3 \leq 3$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

ج. $\text{Min } Z = 4X_1 + 5X_2$

Subject to,

$-X_1 + 3X_2 \leq 2$

$X_1 + X_2 \geq 2$

$X_2 = 3$

$X_1 , X_2 \geq 0$

د. $\text{Min } Z = 2X_1 + X_2 + 4X_3$

Subject to,

$X_1 - X_2 = 1$

$X_1 + 3X_2 + 2X_3 \leq 6$

$X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 3$

$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$

س14: أعد حل المسائل في السؤال الثالث عشر بطريقة المرحلتين.

س15: بين أن النموذج التالي يحتوي على حل متكرر.

$\text{Max } Z = 3X_1 + 9X_2$

Subject to,

$X_1 + 4X_2 \leq 8$

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س16: بين أن النموذج التالي يحتوي على حلول بديلة.

$Max\ Z = 2X_1 - X_2 + 3X_3$

Subject to,

$X_1 - X_2 + 5X_3 \leq 10$

$X_1 - X_2 + 3X_3 \leq 40$

$X_1 , X_2, X_3 \geq 0$

س 17: بين أن منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة.

$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to,

$X_1 - X_2 \leq 2$

$X_1 \leq 3$

$X_1 , X_2 \geq 0$

هل يوجد لهذا النموذج حل أمثل؟

س18: بين أن النموذج التالي ليس له حل بالطريقة البيانية.

$Min\ Z = 3X_1 + 2X_2$

Subject to,

$X_1 + X_2 \leq 1$

$2X_1 + 4X_2 \geq 8$

$X_1 , X_2 \geq 0$

س19 : حل السؤال الثاني عشر باستخدام برمجية إكسل Excel .

الوحدة الثانية

النموذج المقابل وتحليل الحساسية

The Dual Form and Sensitivity Analysis

الوحدة الثانية

النموذج المقابل وتحليل الحساسية

The Dual Form and Sensitivity Analysis

أولاً: النموذج المقابل : The Dual Form

ترتبط عادة مشكلة البرمجة الخطية مع نموذج برمجي أولي (Primal Model) من نماذج البرمجة الخطية، الذي يمكن أن يخضع للمعالجة في المرحلة الأولى قبل أن يتم حله أو يكون حلة معقد نوعاً ما ويقترن دائماً مع هذا النموذج نموذج آخر يطلق عليه النموذج المقابل (Dual Model)، ولكل نموذج مقابل حل أمثل ينطبق تماماً مع حل النموذج الأولي.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي.

خطوات تحويل النموذج الأولي إلى نموذج مقابل:

1. نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تقليل (Min) فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تعظيم (Max) والعكس بالعكس.
2. استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز X في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز Y في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من Z في النموذج الأولي إلى W في النموذج المقابل.
3. جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي (ثوابت القيود) معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل.

4. جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي، الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل.

5. تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في قيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف. (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات).

6. إضافة شرط عدم السالبية على المتغيرات الجديدة.

7. تغيير إشارة القيود من ($\leq$) إلى ($\geq$) أو العكس.

ملاحظة:

1. إذا كان عدد متغيرات النموذج الأولي = n وعدد القيود = m فإن عدد متغيرات النموذج المقابل = m وعدد القيود = n.

2. عند التحويل من نموذج أولي إلى نموذج مقابل يجب مراعاة ما يلي:

أ. إذا كانت دالة الهدف Max فيجب أن تكون القيود كلها أقل من أو يساوي ($\leq$).

ب. إذا كانت دالة الهدف Min فيجب أن تكون القيود كلها أكبر من أو يساوي($\geq$).

ج. اذا لم تتحقق هذه الشروط نحققها كما في الأمثلة التالية.

مثال "1":

أكتب النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\text{Min } Z = 4X_1 + X_2$$

Subject to,

$$30X_1 + 10X_2 \geq 100$$

$$125X_1 + 12X_2 \geq 200$$

$$120X_1 + 15X_2 \geq 150$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بالإعتماد على الخطوات المذكورة آنفاً ستكون صيغة النموذج المقابل كما يلي:

- عدد المتغيرات في النموذج الأولي يساوي 2 وعدد القيود يساوي 3 لذا فإن

- عدد المتغيرات في النموذج المقابل سيكون يساوي 3 وعدد القيود يساوي 2.

- نحول مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 30 & 125 & 120 \\ 10 & 12 & 15 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 125 & 12 \\ 120 & 15 \end{bmatrix}$$

لنفرض أن متغيرات النموذج المقابل هي y_1، y_2، y_3 ودالة الهدف w.

فيصبح النموذج المقابل:

$$\text{Max } w = 100y_1 + 200y_2 + 150y_3$$

Subject to,

$$30y_1 + 125y_2 + 120y_3 \leq 4$$

$$10y_1 + 12y_2 + 15y_3 \leq 1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال "2":

أكتب النموذج المقابل لنموذج البرمجة الخطية الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

Subject to,

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$

$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$

$$-X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

الحل:

عدد المتغيرات في دالة الهدف w سيكون ثلاثة متغيرات لأن عدد القيود في النموذج الأولي هو ثلاثة قيود.

نلاحظ أن إشارة القيود في النموذج الأولي مختلفة، لذلك يجب أن نجعل إشارة كل القيود من نوع واحد وهي (≤) وذلك لأن دالة الهدف Max لذلك نحتاج أن نغير إشارة القيد الثالث.

$-X_1 + X_2 + 4X_3 + X_4 \geq 9$ إلى $+ X_1 - X_2 - 4X_3 - X_4 \leq -9$ (تعكس إشارة ≤ إلى ≥ بضرب القيد بـ 1-).

وعليه فإن النموذج الأولي سيكون:

$$\text{Max } Z = X_1 + X_2 - X_3 - X_4$$

Subject to,

$$3X_1 - 2X_2 + X_3 + 5X_4 \leq 18$$

$$5X_1 + 6X_3 \leq 20$$

$$+X_1 - X_2 - 4X_3 - X_4 \leq -9$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

لتحويل مصفوفة معاملات القيود نجد منقول المصفوفة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 6 & -4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \leftarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 5 & 0 & 6 & 0 \\ 1 & -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

وبالتالي سيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$\text{Min } Z = 18y_1 + 20y_2 - 9y_3$$

Subject to,

$$3y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 1$$

$$-2y_1 - y_3 \geq 1$$

$$y_1 + 6y_2 - 4y_3 \geq -1$$

$$5y_1 - y_3 \geq -1$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال "3":

حول النموذج أدناه إلى النموذج المقابل:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 7X_2 - 5X_3$$

Subject to,

$$X_1 + 5X_2 + X_3 \geq 4$$

$$2X_1 + 3X_3 \leq 2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الحل:

حيث أن دالة هدف النموذج الأولي هي تقليل Min فيجب أن تكون إشارة جميع القيود في النموذج ($\geq$) ، لكن القيد الثاني يظهر على الصورة $2X_1 + X_3 \leq 2$ بالتالي نضرب طرفي القيد بـ -1 ليصبح: $-2X_1 - X_3 \geq -2$ نعيد كتابة النموذج الأولي كما يلي:

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 7X_2 - 5X_3$$

Subject to,

$$X_1 + 5X_2 + X_3 \geq 4$$

$$-2X_1 - X_3 \geq -2$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

عدد القيود في النموذج الأولي تساوي 2، لذا فإن متغيرات النموذج المقابل ستكون y_1, y_2 والنموذج يأخذ الشكل التالي:

$$\text{Max } w = 4y_1 - 2y_2$$

Subject to,

$$y_1 - 2y_2 \leq 3$$

$$5y_1 \leq 7$$

$$y_1 - y_2 \leq -5$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

مثال "4":

حول النموذج أدناه إلى النموذج المقابل:

$$Max\ Z = 2X_1 - X_2$$

Subject to,

$$X_1 + 3X_2 = 7$$

$$X_1 - X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

لتحويل هذا النموذج إلى النموذج المقابل يجب أن تكون كل القيود أقل من أو يساوي لأن دالة الهدف Max وهنا نلاحظ أن القيد الأول هو:

$$X_1 + 3X_2 = 7$$

والذي يمكن أن نعبر عنه بدلالة القيدين:

$$X_1 + 3X_2 \leq 7$$

$$X_1 + 3X_2 \geq 7$$

وحيث أن دالة الهدف Max فإن القيد $X_1 + 3X_2 \geq 7$ سيضرب بـ –1 ليصبح: $-X_1 - 3X_2 \leq -7$.

نعيد كتابة النموذج الأولي كما يلي:

$$Max\ Z = 2X_1 - X_2$$

Subject to,

$$X_1 + 3X_2 \leq 7$$

$$-X_1 - 3X_2 \leq -7$$

$$X_1 - X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

عدد القيود ثلاثة ولذلك فإن عدد متغيرات النموذج المقابل ستكون ثلاثة متغيرات هي y'_1 ، y''_1 ، y_2 ودالة الهدف w وهكذا نعبر عن صيغة النموذج المقابل كما يلي:

$$\text{Min } w = 7y'_1 - 7y''_1 + 3y_2$$

Subject to,

$$y'_1 - y''_1 + y_2 \geq 2$$

$$3y'_1 - 3y''_1 - y_2 \geq -1$$

$$y'_1, y''_1, y_2 \geq 0$$

ويمكن كتابة النموذج المقابل بالشكل التالي:

$$\text{Min } w = 7(y'_1 - y''_1) + 3y_2$$

Subject to,

$$(y'_1 - y''_1) + y_2 \geq 2$$

$$3(y'_1 - y''_1) - y_2 \geq -1$$

$$y'_1, y''_1, y_2 \geq 0$$

وبجعل $y_1 = y'_1 - y''_1$ يصبح النموذج كالآتي: علماً بأن y_1 تكون غير محددة الإشارة (unrestricted) وذلك لإعتمادها على متغيرين.

$$\text{Min } W = 7y_1 + 3y_2$$

Subject to,

$$y_1 + y_2 \geq 2$$

$$3y_1 - y_2 \geq -1$$

$$y_1 \text{ unrestricted }, y_2 \geq 0$$

ملاحظة:

إذا أوجدنا حل النموذج الأولي والنموذج المقابل لمسألة ما فإن الحلين سيتطابقان، والمثـال التـالي يوضح ذلك.

مثال:

ليكن لديك النموذج الأولي التالي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 3X_2$$

Subject to,

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$3X_1 + X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

المطلوب: أ. أكتب النموذج المقابل.

ب. جد حل النموذج الأولي باستخدام الطريقة البيانية.

ج. جد حل النموذج المقابل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل: أ. النموذج المقابل هو:

$$\text{Min } w = 4y_1 + 6y_2$$

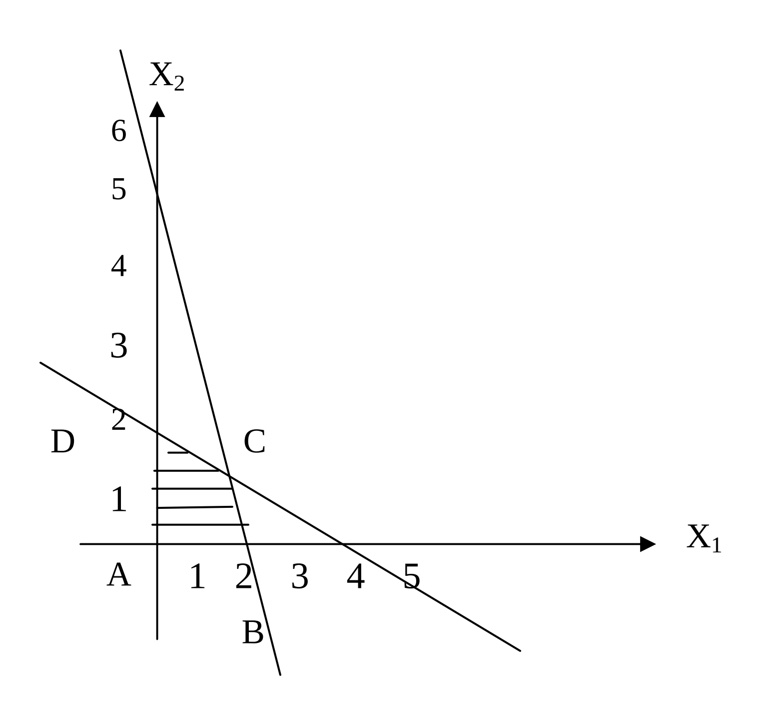
Subject to,

$$y_1 + 3y_2 \geq 2$$

$$2y_1 + y_2 \geq 3$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ب. حل النموذج الأولي بالطريقة البيانية:



ولإيجاد اكبر قيمة ل Z تكون الجدول باستثناء A :

نقاط الحدود	X_1	X_2	Z
B	2	0	4
C	8/5	6/5	6.8
D	0	2	6

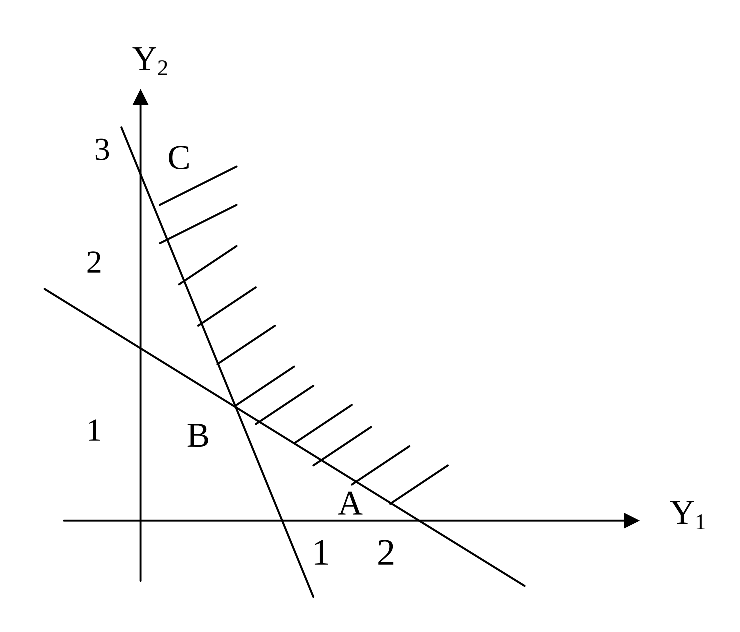
ويكون الحل الأمثل للنموذج الأولي هو:

$X_1 = 8/5$

$X_2 = 6/5$

$Z = 6.8$

ج. حل النموذج المقابل بالطريقة البيانية:



ولإيجاد أقل قيمة لـ w نكون الجدول التالي:

نقاط الحدود	X_1	X_2	W
A	2	0	8
C	0	3	18
B	7/5	1/5	6.8

ويكون الحل الأمثل هو:

$y_1 = 7/5$

$y_2 = 1/5$

$w = 6.8$

مثال "2":

ليكن لدينا النموذج التالي:

$$Min\ Z = 4X_1 + X_2$$

Subject to,

$$3X_1 + X_2 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

1. جد حل النموذج الأولي بطريقة م – الكبرى.
2. أكتب النموذج المقابل لهذا النموذج.
3. جد حل النموذج المقابل بالطريقة المبسطة.

الحل:

1. نجد في البداية الشكل القياسي للقيود فتكون:

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 3$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0$$

أما الشكل القياسي لدالة الهدف فهو:

$$Min\ Z = 4X_1 + X_2 + 0X_3 + 0X_4 + MR_1 + MR_2$$

وبتعويض قيمة R_1، R_2 من القيد الأول والثاني تصبح دالة الهدف:

$$Z = 4X_1 + X_2 + M (3-3X_1 - X_2) + M (6 - 4X_1 - 3X_2 + X_3)$$

$$= (4 - 7M) X_1 - (1 - 4M) X_2 - MX_3 + 9M$$

$$Z - (4 - 7M) X_1 - (1 - 4M) X_2 - MX_3 = 9M$$

وبالتالي يكون الشكل القياسي للنموذج هو:

$$Z - (4 - 7M) X_1 - (1 - 4M) X_2 - MX_3 = 9M$$

Subject to,

$$3X_1 + X_2 + R_1 = 3$$

$$4X_1 + 3X_2 - X_3 + R_2 = 6$$

$$X_1 + 2X_2 + X_4 = 3$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, R_1, R_2 \geq 0$$

وتكون جداول الحل كالآتي:

	B.V	X_1	X_2	X_3	X_4	R_1	R_2	R.H.S
1	R_1	3	1	0	0	1	0	3
	R_2	4	3	-1	0	0	1	6
	X_4	1	2	0	1	0	0	3
	Z	-4 + 7M	-1 + 4M	-M	0	0	0	9M
2	X_1	1	1/3	0	0	1/3	0	1
	R_2	0	5/3	-1	0	-4/3	1	2
	X_4	0	5/3	0	1	-1/3	0	2
	Z	0	1/3 + 5/3M	-M	0	4/3 – 7/3M	0	4+2M
3	X_1	1	0	1/5	0	3/5	-1	3/5
	X_2	0	1	-3/5	0	-4/5	3/5	6/5
	X_4	0	0	1	1	1	-1	0
	Z	0	0	1/5	0	8/5 – M	-1/5 –M	18/5
4	X_1	1	0	0	-1/5	2/5	-4/5	3/5
	X_2	0	1	0	3/5	-1/5	0	6/5
	X_3	0	0	1	1	1	-1	0
	Z	0	0	0	-1/5	7/5-M	0-M	18/5

2

. **النموذج المقابل:**

نحول في البداية قيد المساواة إلى قيدين (≤) و (≥):

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + X_2 \leq 3$$

نحول القيود التي إشارتها (≥) إلى (≤) فتكون القيود كالآتي:

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$-3X_1 - X_2 \geq -3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$-X_1 - 2X_2 \geq -3$$

وتكون دالة الهدف في النموذج المقابل:

$$\text{Max } w = 3y_1' - 3y_1'' + 6y_2 - 3y_3$$

أما القيود فتكون

$$3y_1' - 3y_1'' + 4y_2 - y_3 \leq 4$$

$$y_1' - y_1'' + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

نجعل $y_1 = y_1' - y_1''$ يصبح النموذج المقابل:

$$\text{Max } w = 3y_1 + 6y_2 - 3y_3$$

Subject to,

$$3y_1 + 4y_2 - y_3 \leq 4$$

$$y_1 + 3y_2 - 2y_3 \leq 1$$

y_1 unrestricted, $y_2, y_3 \geq 0$

3. حل النموذج المقابل:

الشكل القياسي للنموذج هو:

$$w - 3y_1 - 6y_2 + 3y_3 = 0$$

Subject to,

$$3y_1 + 4y_2 - y_3 + S_1 = 4$$

$$y_1 + 3y_2 - 2y_3 + S_2 = 1$$

$$y_2, y_3, S_1, S_2 \geq 0 \text{ , } y_1 \text{ unrestricted}$$

أما جداول الحل الأمثل فتكون:

	B.V	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**S_1**	**S_2**	**R.H.S**
1	S_1	3	4	-1	1	0	4
	S_2	1	3	-2	0	1	1
	W	-3	-6	3	0	0	0
2	S_1	5/3	0	5/3	1	-4/3	8/3
	y_2	1/3	1	-2/3	0	1/3	1/3
	W	-1	0	-1	0	2	2
3	y_3	1	0	1	3/5	-4/5	8/5
	y_2	1	1	0	2/5	-1/5	7/5
	W	0	0	0	3/5	6/5	18/5

نلاحظ من حل النموذج الأولي والنموذج المقابل ما يلي:

1. في النموذج الأولي أن الحل الأمثل:

$X_1 = 3/5$، $X_2 = 6/5$ ، $Z = 18/5$

2. قيمة R_1، R_2 في الحل الأولي هي على التوالي 7/5، 0.

3. الحل الأمثل في النموذج المقابل:

$$y_1 = 0 \; , \; y_2 = 7/5, \; y_3 = 8/5$$

4. قيمة S_1، S_2 في النموذج المقابل هي على التوالي 3/5، 6/5.

ومن هذه الملاحظات نستنتج أن حل النموذج الأولي يمكن إستنتاجه من حل النموذج المقابل حيث قيم الحل في النموذج الأولي = معاملات المتغيرات الأساسية (S_1، S_2) في دالة الهدف في النموذج المقابل. وحل النموذج المقابل يمكن إستنتاجه أيضاً من حل النموذج الأولي حيث يتم حل النموذج المقابل = معاملات المتغيرات الأساسية (R_1، R_2) في دالة الهدف في النموذج الأولي.

مثال:

في النموذج الرياضي التالي جد النموذج المقابل وحل النموذج المقابل من الحل الأولي.

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 5X_2$$

Subject to,

$$3X_1 + 5X_2 \leq 8$$

$$2X_1 + 7X_2 \leq 12$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

1. حل النموذج الأولي:

الشكل القياسي للنموذج:

$$Z - 2X_1 - 5X_2 = 0$$

Subject to,

$$3X_1 + 5X_2 + S_1 = 8$$

$$2X_1 + 7X_2 + S_2 = 12$$

ويكون جدول الحل الإبتدائي هو:

	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
1	S_1	3	5	1	0	8
	S_2	2	7	0	1	12
	Z	-2	-5	0	0	0

ويكون جدول الحل النهائي هو:

	B.V	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
2	X_2	3/5	1	1/5	0	8/5
	S_2	-4/5	0	-7/5	2	4/5
	Z	1	0	1	0	8

أما النموذج المقابل فهو:

$$\text{Min } w = 8y_1 + 12y_2$$

Subject to,

$$3y_1 + 2y_2 \geq 2$$

$$5y_1 + 7y_2 \geq 5$$

$$y_1, y_2 \geq 0$$

ويكون الحل الأمثل المقابل هو:

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad w = 8$$

ثانياً: تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

تكمن أهمية تحليل الحساسية في أنه يعطي دراسة كاملة للتغيرات التي تطرأ على كل المتغيرات الداخلة في النموذج الرياضي بحيث يبقى لنا أكبر عائد أو أقل تكلفة وما هو مدى التغيرات في هذه المتغيرات فمثلاً إذا أنتجنا نوع من السلع وأردنا تسويق هذا المنتج فإن هناك عدة ظروف تلعب دوراً في تحديد سعر هذه السلعة. فما هو أقل مدى وأكبر مدى يمكن أن يأخذه سعر هذه السلعة بحيث يبقى الربح أفضل ما يمكن. وسنعرض هذا الموضوع للحل الأمثل للنموذج الرياضي سواء كان هذا الحل بالطريقة البيانية أو بالطريقة المبسطة، وذلك عن طريق المثال التالي:

مثال:

ينتج مصنع للأحذية نوعين من الأحذية رجالية A ونسائية B ولإنتاج أي نوع من الاحذية يجب أن يمر في مرحلتين المرحلة الأولى التصنيع والمرحلة الثانية التجميع، فإذا كان تصنيع الحذاء الرجالي يستغرق 3 ساعات وتصنيع الحذاء النسائي يستغرق ساعة واحدة في حين تجميع أي نوع من الأحذية يستغرق ساعة واحدة فإذا كانت الطاقة الإنتاجية لمرحلة التصنيع أقل من أو يساوي 15 ساعة في اليوم وطاقة الإنتاج لمرحلة التجميع أقل أو يساوي 10 ساعات يومياً، فما هو الإنتاج اليومي الأمثل الذي يحقق أعلى ربح إذا كان ربح الحذاء الرجالي هو "3" دنانير في حين أن ربح الحذاء النسائي هو ديناران.

الحل: نفترض أن: X_1: عدد الأحذية الرجالية التي سيتم إنتاجها.

X_2: عدد الأحذية النسائية التي سيتم إنتاجها.

وبالتالي فإن النموذج الرياضي للمسألة هو:

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$$ دالة الهدف

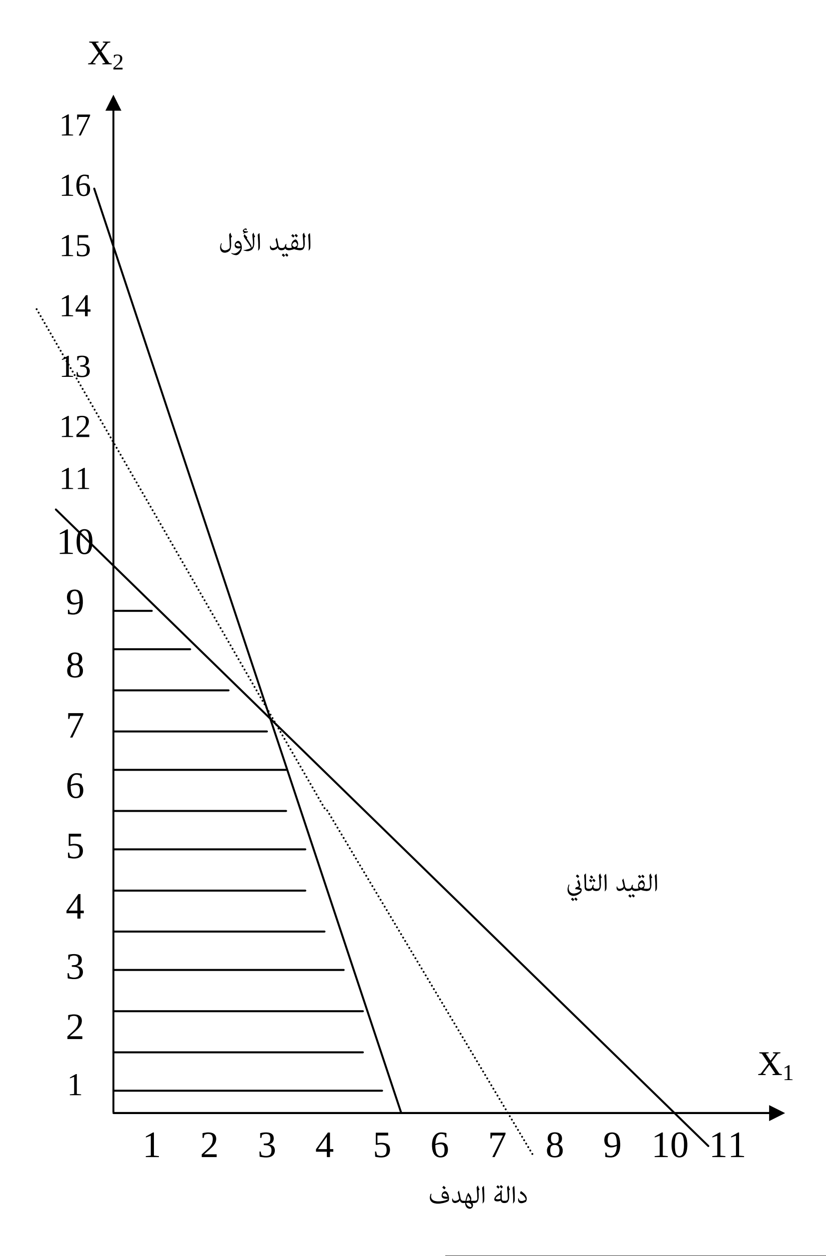
Subject to,

$$3X_1 + X_2 \leq 15$$ المصدر الأول

المصدر الثاني $X_1 + X_2 \leq 10$

شرط عدم السالبية $X_1, X_2 \geq 0$

وحل هذا النموذج بالطريقة البيانية هو:



ويكون الحل:

$$Z = 22.5$$

$$X_1 = 2.5$$

$$X_2 = 7.5$$

ملاحظة:

تسمى المصادر (القيود) المؤثرة على الحل الأمثل بالمصادر غير الكافية (Scarce) والمصـادر التـي لا تؤثر في قيمتها على الحل الأمثل بالمصادر الفائضة Abundant فنجد هنا أن كلا المصدرين يـؤثران عـلى الحل الأمثل وبالتالي تكون هذه المصادر غير كافية.

والآن نتساءل ما هو الحد المسموح به في التغيير في معاملات المتغـيرات في دالـة الهـدف بحيـث يبقى الحل أمثل؟

نلاحظ من الرسم أن دالة الهدف هي خط مستقيم وبالتالي سيكون تأثير تغيير المتغيرات في دالة الهدف على ميل هذا الخط المستقيم فإذا فرضنا أن دالة الهدف بشكل عام هي:

$$Z = C_1 X_1 + C_2 X_2$$

فإن ميل الخط المستقيم يكون عبارة عن $\frac{C_1}{C_2}$.

وقد ذكرنا سابقاً أن كلا المصدرين يؤثران في الحل فلو ثبتنا قيمة $C_2 = 2$ فإن التغيـير في معامـل المتغير الأول يكون كالآتي:

$\frac{3}{1} \leq \frac{C_1}{2} \leq \frac{1}{1}$ وبالضرب في "2" تصبح

$6 \leq C_1 \leq 2$ وهذا هو مدى التغير في C_1.

وبنفس الطريقة $1 \leq \frac{C_2}{3} \leq \frac{1}{3}$

وبالتالي فإن مدى التغير في معامل المتغير الثاني في دالة الهدف هو:

$$1 \leq C_2 \leq 3$$

إن أي قيمة لمعاملات المتغيرات خارج هذين المديين لا تعطي حلاً أمثل للنموذج. أما التغير في القيود (المصادر) فيأتي بالسؤال ما هو مدى التغير في ثابت القيود (الطرف الأيمن) بحيث يبقى الحل الأمثل؟

وللإجابة على هذا السؤال في مثالنا ننظر إلى خط القيد الأول فنجد أن أقصى حد للتغير (الزيادة) هو زيادة X_1 من (5) إلى (10) و $X_2 = 0$. وبالتالي فإن الثابت في القيد يصبح (30) أي بزيادة مقدارها (15) وأدنى حد للتغيير (النقصان) هو نقصان قيمة X_2 من (15) إلى (10) و $X_1 = 0$ وبالتالي فإن الثابت في القيد يصبح (10) أي ينقص بمقدار (5). وإذا فرضنا أن التغير في الثابت الأول هو (a_1) فإن مدى التغير في الثابت الأول يكون:

$$-5 \leq a_1 \leq 15$$

أما بالنسبة للقيد الثاني فإن أقصى حد للتغير هو بزيادة X_2 من (10) إلى (15) و $X_1 = 0$ وبالتالي فإن قيمة ثابت القيد الثاني تصبح (15) أي بزيادة مقدارها (5) وأدنى حد للتغير هو بنقصان قيمة X_1 من (10) إلى (5) و $X_2 = 0$ وبالتالي فإن قيمة الثابت تصبح (5) أي بنقصان مقداره (5).

وإذا فرضنا ان التغير في الثابت هو (a_2) فإن مدى التغيير في هذا الثابت سيكون

$$-5 \leq a_2 \leq 5$$

أما اذا أردنا حساب مدى هذا التغير عن طريقة جدول الطريقة المبسطة فإننا في البداية نحل النموذج بالطريقة المبسطة ويكون جدول الحل النهائي كالآتي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	R.H.S
X_1	1	0	1/2	-1/2	5/2
X_2	0	1	-1/2	3/2	15/2
Z	0	0	1/2	3/2	22.5

تسمى قيم S1 , S2 في Z في جدول الحدل النهائي باسعار الظل Shadow Price أي أن أسعار الظل في مثالنا هذا هي $\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ على الترتيب .

ولحساب مدى التغير المسموح به في معاملات المتغيرات في دالة الهدف نتبع الخطوات التالية:

1. نفرض أن مقدار التغير في معامل المتغير الأول X_1 هو C_1، ومقدار التغير في معامل المتغير الثاني X_2 هو C_2.

2. نقوم بتشكيل المتباينات للمتغير الأول X_1 بفرض أن قيمته دائماً موجبة (≤ 0) على النحو التالي:

معامل (S_1) في (Z) + (C_1) × معامل (S_1) في (X_1) ≤ 0.

معامل (S_2) في (Z) + (C_1) × معامل (S_2) في (X_1) ≤ 0.

وبنفس الطريقة للمتغير الثاني X_2 تكون:

معامل (S_1) في (Z) + (C_2) × معامل (S_1) في (X_2) ≤ 0.

معامل (S_2) في (Z) + (C_2) × معامل (S_2) في (X_2) ≤ 0.

وبتطبيق ذلك على مثالنا تكون المتباينات للمتغير الأول هي:

$$1/2 + C_1 \times 1/2 \geq 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (1)$$

$$3/2 + C_1 \times -1/2 \geq 0 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

من (1) ينتج أن $C_1 \geq -1$

ومن (2) ينتج أن $C_1 \leq 3$

وبدمج (1) و (2) يكون $-1 \leq C_1 \leq 3$

والتغيير في معامل X_1 يكون:

$$3-1 \leq X_1 \leq 3+3$$

أي $2 \leq X_1 \leq 6$

ومتباينات X_2 تكون:

$$1/2 + C_2 \times -1/2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

وأيضاً $3/2 + C_2 \times 3/2 \geq 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$

من (3) ينتج أن $C_2 \leq 1$

ومن (4) ينتج أن $C_2 \geq -1$

وبدمج (3) و (4) يكون $-1 \leq C_2 \leq 1$

والتغيير في معامل X_2 يكون:

$$2-1 \leq X_2 \leq 2+1$$

أي $1 \leq X_2 \leq 3$

أما لحساب مدى التغير المسموح به في ثوابت القيود (المصادر) نتبع الخطوات التالية:

1. نفرض أن مقدار التغير في الثابت الأول (a_1)، ومقدار التغير في الثابت الثاني (a_2).

2. نقوم بتشكيل المتباينات للثابت الأول على النحو التالي:

ثابت (X_1) + (a_1) × معامل (S_1) في (X_1) ≥ 0.

ثابت (X_2) + (a_1) × معامل (S_1) في (X_2) ≥ 0.

وبنفس الطريقة للثابت الثاني:

ثابت $(X_1) + (a_2) \times$ معامل (S_2) في $(X_1) \geq 0$.

ثابت $(X_2) + (a_2) \times$ معامل (S_2) في $(X_2) \geq 0$.

وبتطبيق ذلك على مثالنا تكون المتباينات للثابت الأول هي:

$5/2 + a_1 \times 1/2 \geq 0$ .... (1)

وأيضاً $15/2 + a_1 \times 1/2 \geq 0$ .... (2)

من (1) ينتج أن $a_1 \geq -5$

ومن (2) ينتج أن $a_1 \leq 15$

وبدمج (1) و (2) يكون $-5 \leq a_1 \leq 15$

ونجمع الطرفين ثابت القيد الأول $-5+15 \leq a_1 \leq 15 + 15$

ويكون مدى التغير $10 \leq a_1 \leq 30$

ومتباينات الثابت الثاني تكون:

$5/2 + a_2 \times -1/2 \geq 0$ .... (3)

$15/2 + a_2 \times 3/2 \geq 0$ .... (4)

من (3) ينتج أن $a_2 \leq 5$

ومن (4) ينتج أن $a_2 \geq -5$

وبدمج (3) و (4) يكون $-5 \leq a_2 \leq 5$

نجمع الطرفين ثابت القيد الثاني $-5 + 10 \leq a_2 \leq 5 + 10$

ويكون مدى التغير $5 \leq a_2 \leq 15$

مثال "2":

إذا علمت أن جدول الحل الأمثل للنموذج التالي:

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2$$

Subject to,

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$4X_1 + X_2 \leq 8$$

$$4X_1 - 2X_2 \leq 2$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

هو:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	R.H.S
X_2	0	1	1/2	-1/2	0	2
X_1	1	0	-1/8	3/8	0	3/2
S_3	0	0	1	-2	1	4
Z	0	0	5/8	1/8	0	17/2

1. حدد حالة كل مصدر من المصادر:
2. ما هي اسعار الظل للنموذج
3. أوجد مدى التغير في معامل كل متغير من متغيرات دالة الهدف.
4. أوجد مدى التغير في ثوابت القيود.

الحل:

1. نلاحظ من الجدول أن القيدين الأول والثاني هو قيود غير كافية (Scarce) والقيد الثالث فائض (Abundant).

2. اسعار الظل هي $0, \frac{1}{8}, \frac{5}{8}$ على الترتيب

3. نفرض أن مدى التغير في معامل المتغير الأول (X_1) هو (C_1)، وبالتالي ستكون متباينات المتغير الأول هي:

$$5/8 + C_1 \times -1/8 \geq 0 \; \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$1/8 + C_1 \times 3/8 \geq 0 \; \dots\dots\dots\dots (2)$$

من (1) ينتج أن $C_1 \leq 5$

ومن (2) ينتج أن $C_1 \geq -3$

وبدمج (1) و (2) يكون $-3 \leq C_1 \leq 5$

والتغيير في معامل X_1 هو:

$$3 - 3 \leq X_1 \leq 3 + 5$$

أي $0 \leq X_1 \leq 8$

ومتباينات المتغير الثاني تكون:

$$5/8 + C_2 \times 1/2 \geq 0 \; \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$1/8 + C_2 \times -1/2 \geq 0 \; \dots\dots\dots\dots (4)$$

من (3) ينتج أن $C_2 \geq -5/4$

ومن (4) ينتج أن $C_2 \leq 1/4$

وبدمج (3) و (4) يكون $-5/4 \leq C_2 \leq 1/4$

والتغيير في معامل X_2 يكون:

$$2 - 5/4 \leq X_2 \leq 2 + 1/4$$

أي $3/4 \leq X_2 \leq 9/4$

4. لنفرض أن التغير في الثابت الأول هو (a_1) والثابت الثاني (a_2) والثابت الثالث (a_3). وبالتالي ستكون متباينات الثابت الأول هي:

$$3/2 + a_1 \times -1/8 \geq 0 \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1)$$

$$2 + a_1 \times 1/2 \geq \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (2)$$

$$4 + a1 \text{ x } 1 \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (3)$$

من (1) ينتج أن $a_1 \leq 12$

ومن (2) ينتج أن $a_1 \geq -4$

ومن (3) ينتج أن $a_1 \geq -4$

ونأخذ أقل الموجب وأقل السالب وهما (1) و (2)

وبدمج (1) و (2) يكون $-4 \leq a_1 \leq 12$

ويكون مدى التغير هو $8 \leq a_1 \leq 24$

ومتباينات الثابت الثاني تكون:

$$3/2 + a_2 \times 3/8 \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \; (4)$$

$$2 + a_2 \times -1/2 \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots \; (5)$$

$$4 + a_2 \, (-2) \geq 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6)$$

من (4) ينتج أن $a_2 \geq -4$

ومن (5) ينتج أن $a_2 \leq 4$

ومن (6) ينتج أن $a_2 \leq 2$

بأخذ أقل الموجب وأقل السالب يكون (4) و (6)

وبدمج (4) و (6) ينتج

$$-4 \leq a_2 \leq 2$$

ويكون مدى التغير هو :

$$4 \leq a_2 \leq 10$$

مدى التغير في ثابت القيد الثالث a3 هو :

$$2 + 0\, a_3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a_3 \leq \infty$$

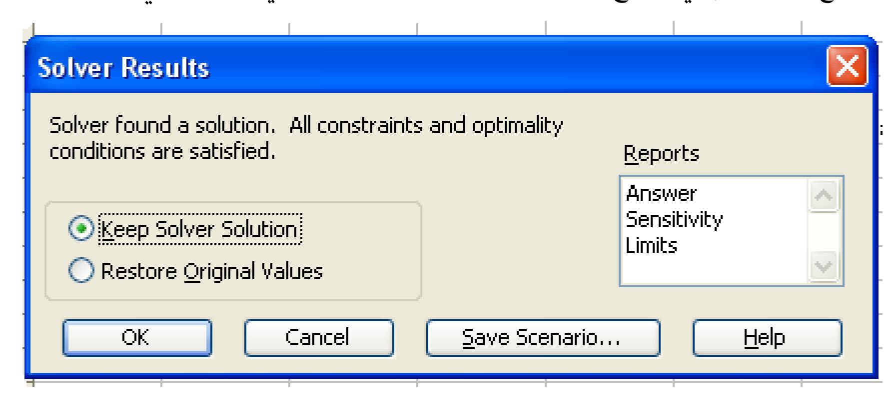
$$\frac{3}{2} + 0\, a_3 \geq 0$$

$$4 + (1)\, a_3 \geq 0 \Rightarrow a_3 \geq -4$$

∴ مدى التغير هو $-4 \leq a_3 \leq \infty$

تطبيقات الحاسوب باستخدام برنامج Solver

من مربع الحل الاخير في برنامج Solver نختار Sensitivity كما في الشكل التالي :



وبتطبيقه ذلك على المثال السابق يكون الحل كما يلي:

	MENS	WOMENS	TOTAL		R.H.S
RESURCE1	3	1	15	< =	15
RESURCE2	1	1	10	< =	10
OBJ.FUN	3	2	22.5		
SOLUATION	2.5	7.5			

Microsoft Excel 11.0 Sensitivity Report
Worksheet: [Book1]ورقة١
Report Created: 06/01/2002 11:55:24 م

Adjustable Cells

Allowable Decrease	Allowable Increase	Objective Coefficient	Reduced Cost	Final Value	Name	Cell
1	3	3	0	2.5	SOLUATION MENS	B6
1	1	2	0	7.5	SOLUATION WOMENS	C6

Constraints

Allowable Decrease	Allowable Increase	Constraint R.H. Side	Shadow Price	Final Value	Name	Cell
1E+30	1E+30	15	0.5	15	RESURCE1 TOTAL	D3
1E+30	1E+30	10	1.5	10	RESURCE2 TOTAL	D4

تمارين

س1 : اكتب النموذج المقابل للنموذج التالي :

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 7X_2$$

s.t,

$$2X_1 + X_2 \leq 20$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$10X_1 + 18X_2 \leq 120$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

س2 : ليكن لديك النموذج التالي :

$$\text{Min } Z = 5X_1 + 4X_2$$

s.t,

$$X_1 + 2X_2 \geq 20$$

$$X_1 + X_2 \geq 12$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أ- اكتب النموذج المقابل لهذا النموذج

ب- جد الحل الاولي والمقابل بطريقة الرسم البياني

ج- جد مدى التغير في معاملات دالة الهدف للنموذج المقابل

س3 : اكتب النموذج المقابل للنموذج الأولى التالي ثم جد حل النموذج الاولى من حل النموذج المقابل بالطريقة المبسطة

$$\text{Min } Z = 4X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

s.t,

$$X_1 + 3X_2 \geq 2$$

$$X_1 + X_3 = 3$$

$$-X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 5$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

س4 : أوجد حل النموذج الأولي في س3 بطريقة (م) الكبرى، ثم أوجد حل النموذج المقابل بالطريقة المبسطة .

س5 : في النموذج التالي:

$$Max\ Z = 3X_1 + 2X_2 + X_3$$

Subject to,

$$X_1 + X_3 \leq 2$$

$$2X_1 + 2X_2 + X_2 \geq 3$$

$$3X_1 + X_2 + 2X_3 = 5$$

$$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$$

أ- جد الحل الأمثل للنموذج بطريقة م – الكبرى .

ب- أكتب النموذج المقابل .

ج- جد حل النموذج المقابل من جدول حل النموذج الأولي.

س6 : في النموذج التالي :

$$Min\ Z = X_1 + 4X_2 + 7X_3$$

Subject to ,

$$X_1 + 2X_2 \geq 1$$

$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 3$$

$$3X_2 + 4X_3 \geq 6$$

$$X_1, X_2 , X_3 \geq 0$$

أ- أكتب النموذج المقابل للنموذج .

ب- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل.

ج- جد حل النموذج الأولي من جدول حل النموذج المقابل.

د- جد مدى التغير في ثوابت القيود للنموذج المقابل.

س7 : في النموذج الرياضي التالي:

$$\text{Max } Z = 3X_1 + 2X_2$$

s.t,

$$X_1 + X_2 \leq 3$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$

$$2X_2 \leq 3$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

أ- حل النموذج باستخدام الرسم البياني .

ب- حدد حالة كل مصدر من المصادر.

ج- جد مدى التغير في معاملات دالة الهدف.

د- جد الحل الأمثل للنموذج المقابل بالطريقة المبسطة ثم أعد حل ب ، ج

س8 : اذا كانت منطقة الحل للنموذج التالي :

$$\text{Min } Z = 3X_1 + 2X_2$$

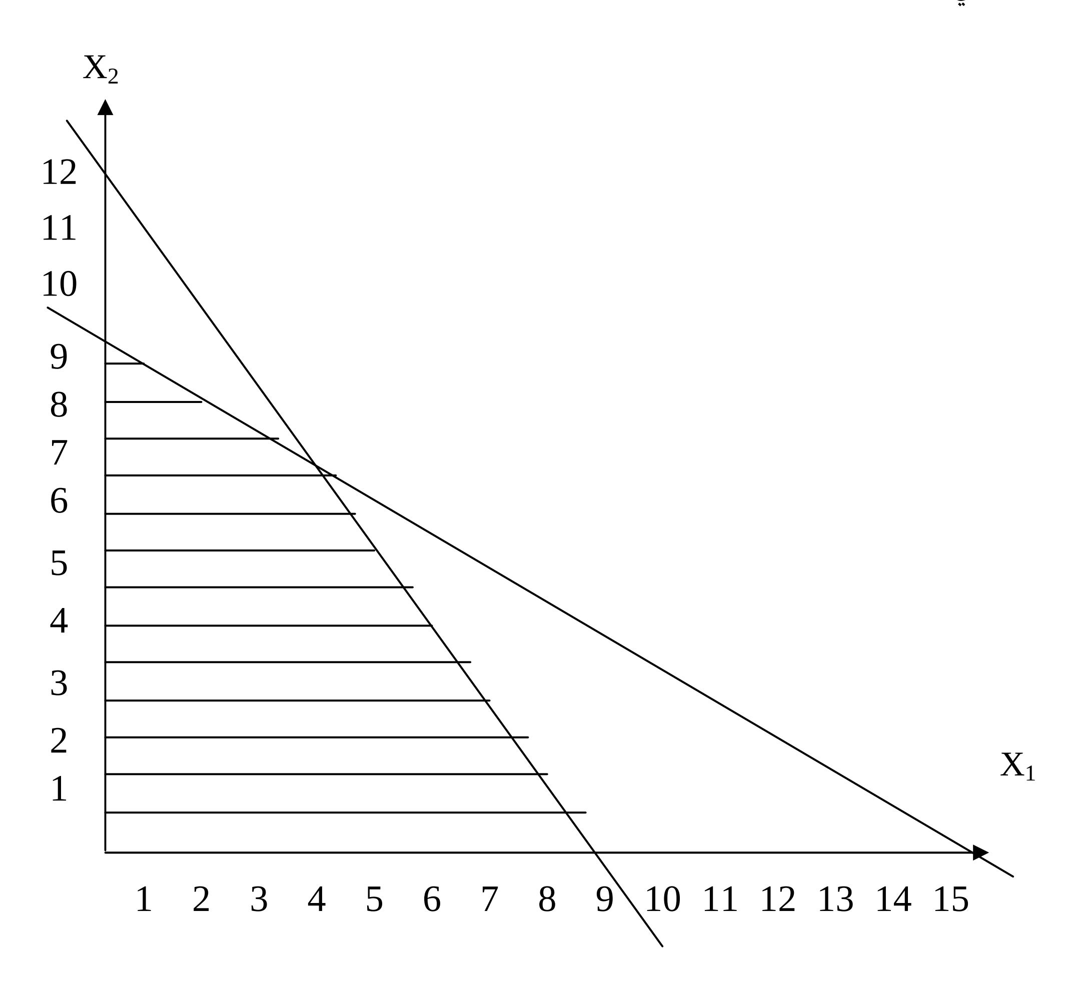
s.t,

$$3X_1 + 5X_2 \leq 45$$

$$4X_1 + 3X_2 \leq 36$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

هي:



أ. أوجد مدى التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

ب. أوجد مدى التغير في القيود (الثوابت).

س9: إذا كان الحل الأمثل للنموذج التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 3X_2$$

Subject to,

$$X_1 - X_2 \leq 2$$

$$2X_1 + X_2 \leq 4$$

$$-3X_1 + 2X_2 \leq 6$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

بالطريقة المبسطة هو:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	Sol.
S_1	0	0	1	1/7	3/7	36/7
X_1	1	0	0	2/7	-1/7	2/7
X_2	0	1	0	3/7	2/7	24/7
Z	0	0	0	19/7	1/7	82/7

أ. حدد حالة كل مصدر من المصادر.

ب. أوجد مدى التغير في معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

ج. أوجد مدى التغير في القيود (الثوابت).

س10: في النموذج التالي:

$$\text{Max } Z = 5X_1 + 8X_2$$

Subject to,

$$X_1 + X_2 \leq 10$$

$$3X_1 + 11X_2 \leq 25$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

أ. جد الحل الأمثل للنموذج الأولي.

ب. جد الحل الأمثل للنموذج المقابل.

ج. جد مدى التغيير في معاملات كل المتغيرات في دالة الهدف في النموذج الأولي والنموذج المقابل.

د. جد مدى التغير في ثوابت القيود في النموذج الأولي والمقابل.

هـ استخدام برنامج Solver من Excel لايجاد الحل الأمثل وتحليل الحساسية للنموذج .

س11: تنتج شركة صناعية للأجهزة الكهربائية غسالات وثلاجات وكل منهما يمر بمرحلتين الأولى التصنيع والثانية التجميع. فإذا كانت أوقات العمليات الإنتاجية لكل نوع من الأجهزة في المرحلتين وربح كل جهاز والوقت المتاح لكل مرحلة معطى في الجدول.

المرحلة / الجهاز	التصنيع	التجميع	ربح الوحدة الواحدة
غسالة	4	5	40
ثلاجة	6	3	50
الوقت المتاح	20	16	

جد الكمية التي يجب أن تنتج من الغسالات والثلاجات لكي تحقق الشركة أعلى عائد. وما هو مقدار التغير في السعر لكي يبقى أعلى عائد. وما هو التغير في الطاقة الإنتاجية لكل مرحلة أيضاً.

الوحدة الثالثة

البرمجة الصحيحة

Integer Programming

الوحدة الثالثة

البرمجة الصحيحة

Integer Programming

مقدمة :

في كثير من المسائل نحتاج أن تكون قيم المتغيرات في نموذج البرمجة الخطية هي اعداد صحيحة. فمثلاً لا يمكن أن نقول أن آلة ونصف تعمل في النموذج، أو نستنتج قميص وربع ففي هذه الحالة نحتاج أن نأخذ القيم الصحيحة فقط وهناك ثلاثة أنواع من مسائل البرمجة الصحيحة:

1- المسائل التي يكون فيها جميع المتغيرات تأخذ فقط الرقمين (0 ، 1) فتكون (1) للمتغير الداخل في النموذج و (0) للمتغير الغير داخل في النموذج.

2- مسائل البرمجة الخطية الصحيحة المختلطة : حيث يأخذ جزء من المتغيرات قيماً صحيحة بينما الجزء الاخر قيماً حقيقية .

3- البرمجة باعداد صحيحة كاملة: حيث تأخذ جميع المتغيرات في نموذج البرمجة الخطية قيماً صحيحة فقط.

وسنأخذ الان مجموعة من مسائل البرمجة الخطية :

مثال:

خمسة مشاريع حسبت على مدار ثلاثة سنوات فكانت المصاريف المتوقعة لكل مشروع في كل سنة والعوائد المتوقعة كما في الجدول

	المصاريف السنوية بالملايين			
المشروع	السنة الاولى	الثانية	الثالثة	العائد بالملايين
1	5	1	8	20
2	4	7	10	40
3	3	9	2	20
4	7	4	1	15
5	8	6	10	30
التمويل المتوفر بالمليون	25	25	25	

أي من هذه المشاريع سوف ينجح على مدار الثلاثة سنوات وأيها لن ينجح .

الحل:

ستكون الاجابة على السؤال إما بنعم أو لا وبالتالي سيكون قيمة

Xi = 1 اذا كان المشروع مختار

0 اذا كان المشروع غير مختار

Xi تمثل المشروع i= 1, 2, 3, 4, 5

فتكون دالة الهدف هي :

$$Max\ Z = 20X_1 + 40X_2 + 20X_3 + 15X_4 + 30X_5$$

Subject to ,

$$5X_1 + 4X_2 + 3X_3 + 7X_4 + 8X_5 \leq 25$$

$$X_1 + 7X_2 + 9X_3 + 4X_4 + 6X_5 \leq 25$$

$$8X_1 + 10X_2 + 2X_3 + X_4 + 10X_5 \leq 25$$

$$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 = (0 , 1)$$

لأن عدد المتغيرات كثير ولصعوبة حل النموذج يدوياً نستخدم الحل الالكتروني عـن طريـق الحاسـوب إمـا باستخدام برنامج الاكسل (Slover) أو برنامج TORA :

فيكون الحل كالآتي :

$X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 1 \quad , \quad X_5 = 0$

أما دالة الهدف $Z = 95$

أما طريقة الحل اليدوية لنموذج البرمجة الخطية فهناك طريقتين للحل هما:

1- طريقة المستوى القاطع لجوموري Geomory's Cutting plane method

2- طريقة الحد والفرع Branch and Bound method

1- طريقة المستوى القاطع :

تعتمد هذه الطريقة على الخطوات التالية:

1- نجد الحل الأمثل بطريقة الرسم البياني وتحديد منطقة الحل ونقطة الحل الأمثل.

2- نعمل قاطع لمنطقة الحل بالقرب من نقطة الحل لمحور X_2 ونجد قيم X_1,X_2 ثم Z عنـد هـذه النقطة .

3- نعمل قاطع آخر لـ X_1 عند أقرب عدد صحيح لنقطة الحل ثم نجد قيم X_2,X_1 عند هذا القـاطع لتكون هذه النقاط اعداداً صحيحة فقط.

مثال:

حل نموذج البرمجة باعداد صحيحة التالي:

$$\text{Max } Z = 14X_1 + 16X_2$$

s.t,

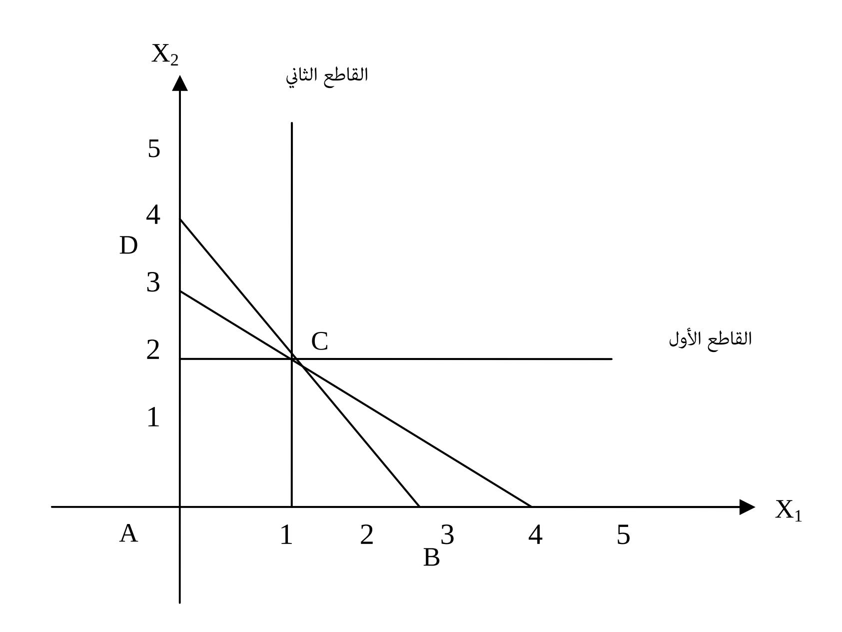
$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$

$$6X_1 + 8X_2 \leq 24$$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and are integers اعداد صحيحة

الحل:

1- نجد الحل الامثل للنموذج كما في الوحدة الاولى فيكون الحل:



وتكون نقطة الحل الامثل هي C حيث يكون الحل الامثل.

$X_1 = 1.71$

$X_2 = 1.71$

$Z = 51.42$

2- يكون القاطع الأول عند X_2=2 فيكون الحل

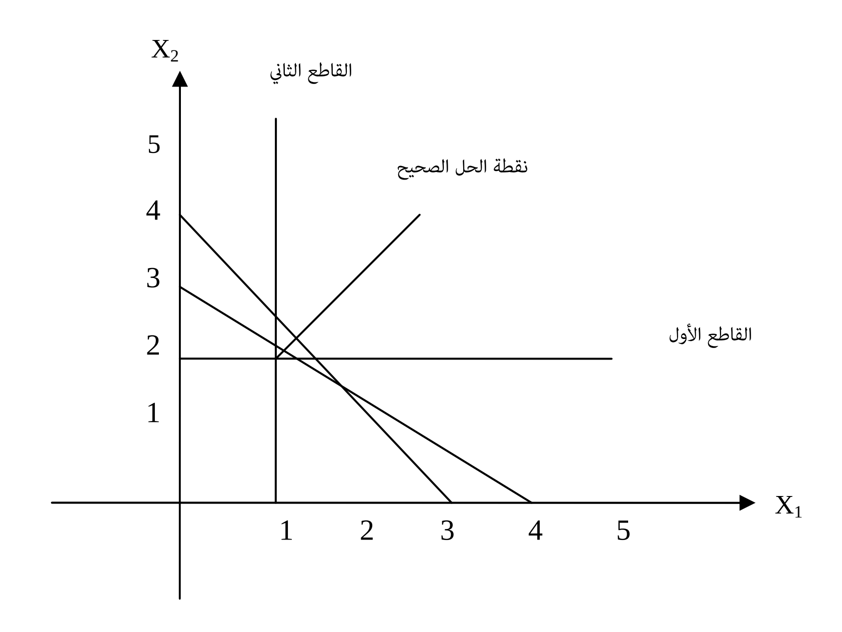
$X_1 = 1.71$

$X_2 = 2$

$Z = 55.94$

وهذا يكون خارج منطقة الحل

كما في الشكل التالي :



لذلك نأخذ القاطع الثاني عند $X_1=1$ على نفس الشكل فيكون الحل الصحيح للنموذج هو :

$X_1 = 1$

$X_2 = 2$

$Z = 46$

وهذا الحل الصحيح الاقرب للحل الأمثل .

مثال :

جد الحل الصحيح لنموذجه البرمجة الخطية التالي:

$$\text{Max } Z = 7X_1 + 10X_2$$

s.t,

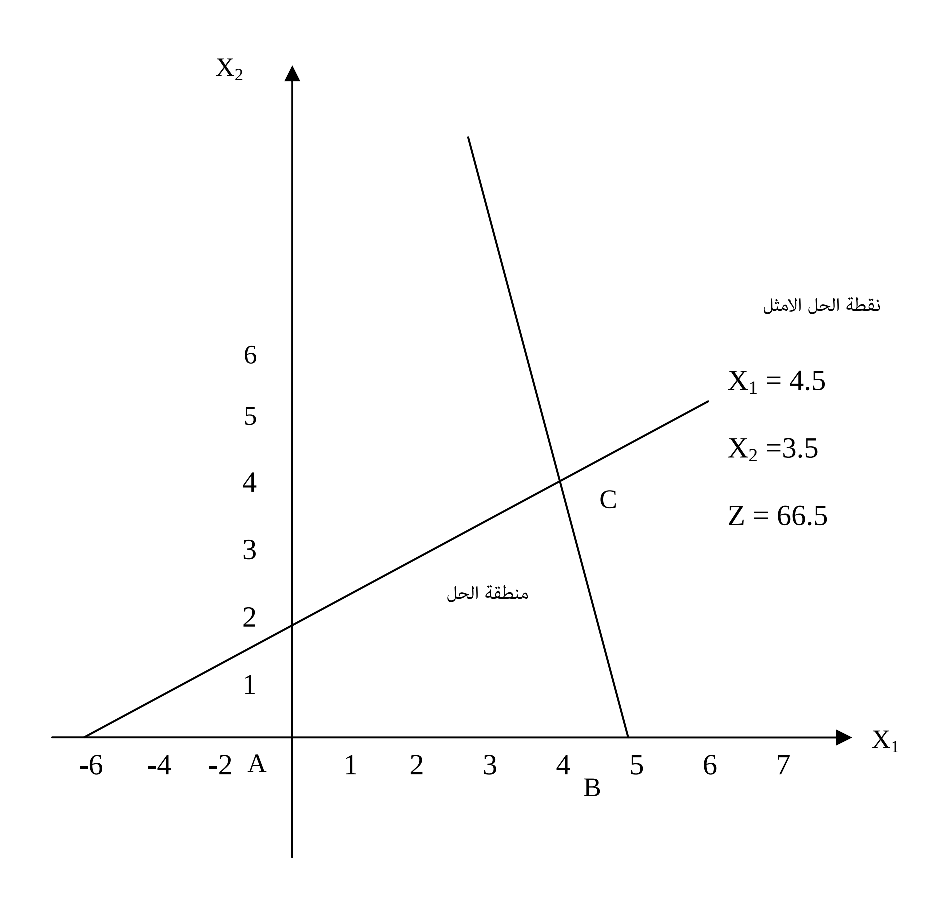
$$-X_1 + 3X_2 \leq 6$$

$$7X_1 + X_2 \leq 35$$

$X_1 , X_2 \geq 0$, and are integer

الحل:

1- نجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية حيث :



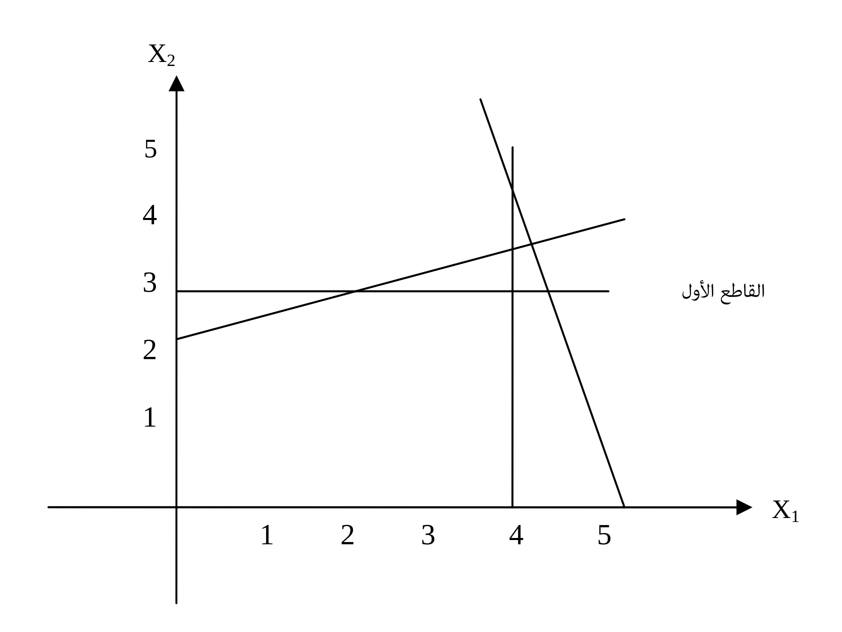
∴ يكون الحل الأمثل كما هو في الرسم عند النقطة C حيث يكون :

$X_1 = 4.5$

$X_2 = 3.5$

$Z = 66.5$

نأخذ القاطع الأول عند X_2=3 حيث يكون الشكل



فيكون الحل كما يلي:

$X_1 = 4.5$

$X_2 = 3$

$Z = 61.5$

يكون الحل ضمن منطقة الحل الامثل لكن قيمة X_1 ليست عدد صحيح لذلك نأخذ القاطع الثاني عند X_1=4 فيكون الحل الصحيح هو :

$X_1 = 4$

$X_2 = 3$

$Z = 58$

2- طريقة الحد والفرع Branch and Bound method

للحل بهذه الطريقة نتبع الخطوات التالية:

1- نجد الحل الامثل كما في نموذج البرمجة الخطية العادي (الوحدة الأولى)

2- نأخذ كل أزواج النقاط ضمن منطقة الحل الامثل (يمكن أخذ أقرب مربع لنقطة الحل الأمثل وذلك لاختصار الحل).

3- يكون الحل لاكبر قيمة تعطي حل باعداد صحيحة اذا كانت دالة الهدف Max واقلها اذا كانت Min

مثال :

جد حل نموذج البرمجة باعداد صحيحة للنموذج التالي :

$$\text{Max } Z = 6X_1 + 4X_2$$

s.t,

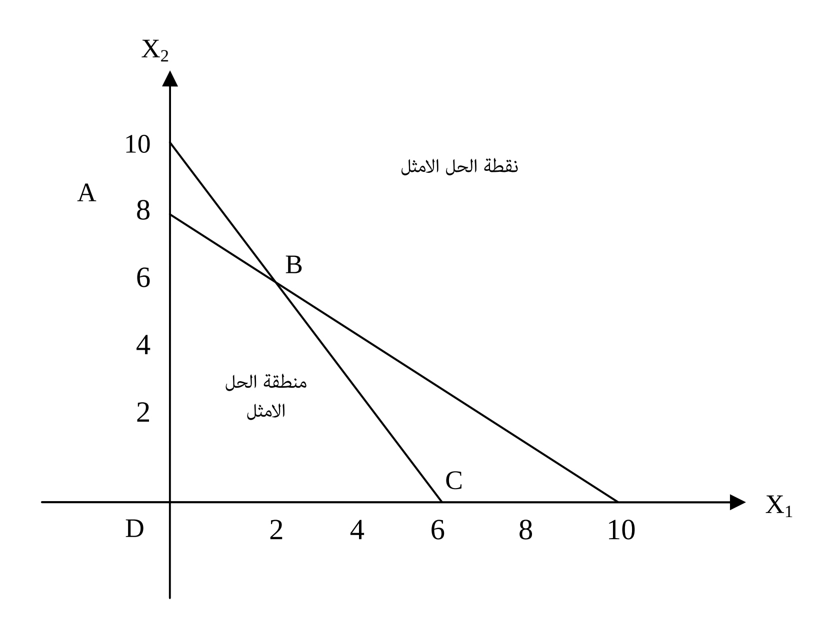
$$4X_1 + 5X_2 \leq 40$$

$$10X_1 + 6X_2 \leq 60$$

$$X_1 , X_2 \geq 0$$

الحل :

يكون الحل كما اوجدناه في الوحدة الأولى هو :



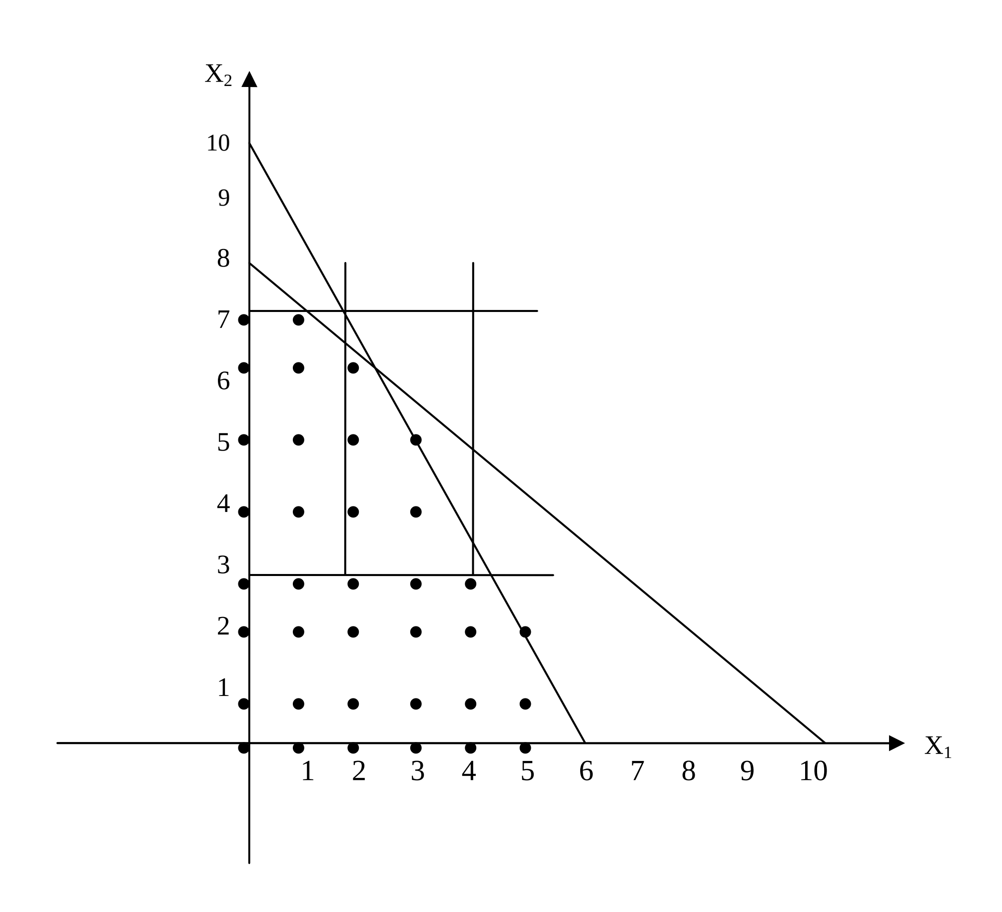
بكون الحل الامثل عند النقطة B حيث

$X_1 = 2.31$

$X_2 = 6.15$

$Z = 38.46$

وعند اعادة الرسم وتحديد النقاط الصحيحة في منطقة الحل الامثل يكون كالآتي:



نستطيع استثناء بعض النقاط وأخذ مربع يحوي النقاط القريبة من نقطة الحل حيث نأخذ

$2 \leq X_1 \leq 4$

$3 \leq X_2 \leq 7$

فتكون النقاط الممكنة للحل وقيمة Z عند كل نقطة من النقاط هي كالآتي:

$Z = 6X_1 + 4X_2$

(2 , 3) $Z = 6\ (2) + 4\ (3) = 24$

(2 , 4) $Z = 6\ (2) + 4\ (4) = 28$

(2 , 5) $Z = 6\ (2) + 4\ (5) = 32$

(2 , 6) $Z = 6 (2) + 4 (6) = 36$

(3 , 3) $Z = 6 (3) + 4 (3) = 30$

(3 , 4) $Z = 6 (3) + 4 (4) = 34$

(3 , 5) $Z = 6 (3) + 4 (5) = 38$

(4 , 3) $Z = 6 (4) + 4 (3) = 36$

وبما أن دالة الهدف Max فإننا نأخذ القيمة الاكبر وهي Z=38 وهي اقرب قيمة للحل الأمثل حيث يكـون الحل للنموذج البرمجة الصحيحة هو :

$X_1 = 3$

$X_2 = 5$

$Z = 38$

مثال :

أوجد حل نموذج البرمجة الصحيحة التالي:

$$\text{Max } Z = X_1 + 2X_2$$

s.t,

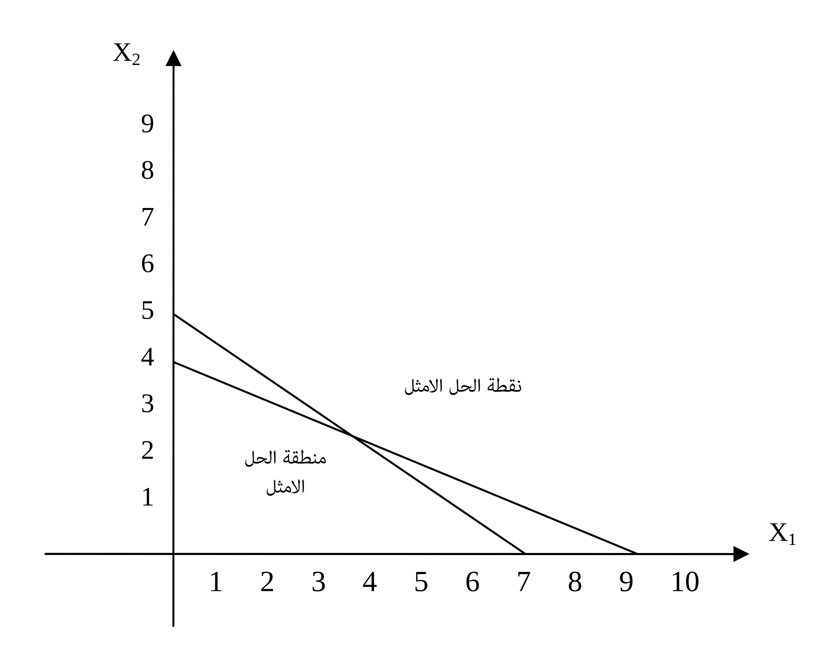
$$5X_1 + 7X_2 \leq 35$$

$$4X_1 + 9X_2 \leq 36$$

$$X_1 , X_2 \geq 0 \text{ and integer}$$

الحل :

نجد الحل الأمثل بالطريقة العادية حيث تكون منطقة الحل الامثل كالآتي:



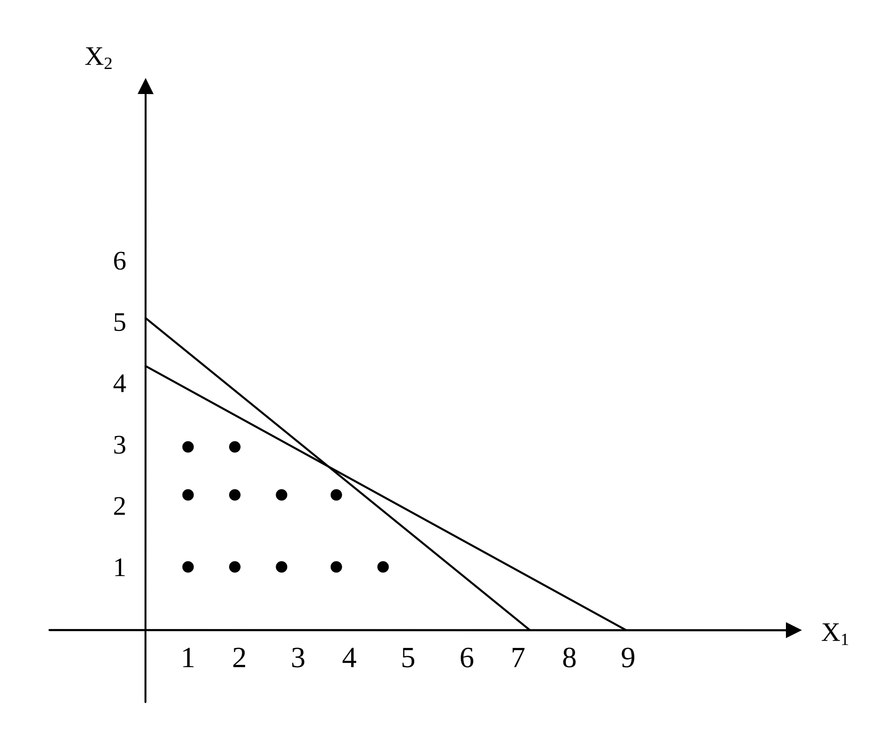
يكون الحل الامثل

$X_1 = 3.71$

$X_2 = 2.35$

$Z = 8.41$

لايجاد نقاط الحل للبرمجة الصحيحة نأخذ نقاط منطقة الحل كالآتي:



لنأخذ النقاط التالية :

$$Z = X_1 + 2X_2$$

(3 , 1)	Z = (3) + 2(1) = 5
(3 , 2)	Z = (3) + 2(2) = 7
(4 , 1)	Z = (4) + 2(1) = 6
(4 , 2)	Z = (4) + 2(2) = 8
(5 , 1)	Z = (5) + 2(1) = 7
(6 , 0)	Z = (6) + 2(0) = 6
(7 , 0)	Z = (7) + 2(0) = 7

∴ الحل الأمثل يكون عند $Z = 8$

حيث تكون

$X_1 = 4$

$X_2 = 2$

$Z = 8$

تطبيقات الحاسوب

سنأخذ فقط المثال الثاني في المستوى القاطع بطريقة TORA

INTEGER PROGRAM -- ORIGINAL DATA

	x1	x2		
Maximize	7.00	10.00		
Subject to				
(1)	-1.00	3.00	<=	6.00
(2)	7.00	1.00	<=	35.00
Lower Bound	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n		
Integer (y/n)?	y	y		

INTEGER PROGRAMMING B&B TREE

Title: Geomatry cutting plane

Problem has no feasible solution

Subproblem N10
Defining branches:
Objective value, z= 66.50
Branching variable: x?

تمارين

س1 : شركة طيران تمتلك طائرات بوينج 737 وتريد شراء 17 طائرة من نوع بـوينج 757، 767 ولكـن قـرار الشراء يأخذ بعين الاعتبار التكاليف والسعة حيث:

أ- الشركة وضعت ميزانية 4000 مليون دولار.

ب- كل طائرة 757 تكلف 350 مليون دولار بين 767 تكلف 220 مليون دولار.

ج- على الأقل $\frac{1}{3}$ الطائرات يجب أن تكون من النوع الكبير 757 .

د- التكلفة السنوية للصيانة وخلافه يجب أن لا تزيد عن 80 مليون سنوياً.

هـ- التكلفة السنوية لطائرة 757 هي (800) ألف بينما لطائرة 767 هي (500) الف دولار.

و- طائرة 757 تستطيع نقل (725) الف راكب سنوياً بينما طائرة 767 تنقل (81) ألف راكب سنوياً.

اكتب نموذج البرمجة الصحيحة والـذي يعظـم عـدد الركـاب المنقـولين سـنوياً ثـم حـل النمـوذج بطريقـة المستوى القاطع.

س2 : شركة صناعية تخطط لانتاج 2000 قطعة على ثلاثة ماكنات وأقل انتاج لكل آلـه هـو (500) قطعـة، الجدول التالي يبين المعلومات الكاملة لهذه الآلات

الآلة	التكلفة	الانتاج لكل وحدة	الطاقة الانتاجية
1	300	2	600
2	100	10	800
3	200	5	1200

اكتب نموذج البرمجة باعداد صحيحة لهذا النموذج وجد الحل عن طريق برمجية إكسل

س3 : لعبة مكونة من لوح عليه 9 مربعات متساوية 3 × 3 نريد تعبئة المربعات بالأرقام مـن (1) إلى (9) بحيث يكون مجموع كل صف وكل عمود وكل قطر (15) بالاضافة إلى أنه يجب أن لا يتكـرر الـرقم في أي مربع ، استخدام البرمجة الصحيحة لايجاد الأرقام في المربعات التسعة .

س4 : جد حل كل من النماذج التالية بطريقة المستوى القاطع :

a) $Max\ Z = 2X_1 + 1.7X_2$

s.t,

$4X_1 + 3X_2 \leq 7$

$X_1 + X_2 \leq 4$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

b) $Max\ Z = 3X_1 + 4X_2$

s.t,

$3X_1 + 2X_2 \leq 8$

$X_1 + 4X_2 \leq 10$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

c) $Max\ Z = 4X_1 + 3X_2$

s.t,

$X_1 + 2X_2 \leq 4$

$2X_1 + X_2 \leq 6$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

d) Max $Z = X_1 + 2X_2$

s.t,

$2X_2 \leq 7$

$X_1 + X_2 \geq 7$

$2X_1 \leq 12$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

س5 : حل النماذج التالية بطريقة Branch and Bound

a) Max $Z = 3X_1 + 2X_2$

s.t,

$2X_1 + 5X_2 \leq 9$

$4X_1 + 2X_2 \leq 9$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

b) Max $Z = X_1 + X_2$

s.t,

$2X_1 + 2X_2 \leq 16$

$6X_1 + 5X_2 \leq 27$

$X_1 , X_2 \geq 0$, and integer

c) Min $Z = 5X_1 + 4X_2$

s.t,

$3X_1 + 2X_2 \geq 5$

$2X_1 + 3X_2 \geq 7$

$X_1 , X_1 \geq 0$ and integer

d) Max $Z = 5X_1 + 7X_2$

s.t,

$2X_1 + X_2 \leq 13$

$5X_1 + 9X_2 \leq 14$

$X_1 , X_2 \geq 0$ and integer

س6 : أعد حل السؤال السابق باستخدام برنامج Solver من إكسل.

الوحدة الرابعة

مشاكل النقل والتخصيص

Transportation and assignment problems

الوحدة الرابعة

مشاكل النقل والتخصيص

Transportation and assignment problems

أولاً: مشاكل النقل

تعتبر طريقة النقل من الأساليب الرياضية ذات الأهمية في عملية إتخاذ القرارات المتعلقة بنقل حجم معين من السلع (أو المواد) من مصادر متعددة إلى مراكز متعددة بهدف سد إحتياجات المراكز ذات العلاقة بأقل كلفة ممكنة.

نموذج النقل Transportation Model

يفترض نموذج النقل وجود عدد من المصادر الإنتاجية (مصانع، شركات،.......) مقدارهاn، وعدد من المراكز التسويقية مقدارها m. يشترط النموذج بشكله الأولي ضرورة المساواة بين حجم السلع في المصادر وحجم الطلب على السلع من قبل المراكز. وأن هدف النموذج هو تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل.

والجدول التالي يمثل مشكلة النقل:

المراكز التسويقية

المصادر

	D_1	D_2	D_3	……..	D_m	Supply العرض
S_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	……..	C_{1m}	b_1
S_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	……..	C_{2m}	b_2
S_3	C_{31}	C_{32}	C_{33}	……..	C_{3m}	b_3
:	:	:	:	:	:	:
S_n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	……..	C_{nm}	b_n
الطلب Demand	a_1	a_2	a_3	……..	a_m	

جدول "1"

الكميات المطلوبة $a_1 , a , \ldots , a_m$

الكميات المعروضة $b_1 , b_2 , \ldots , b_n$

حيث C_{ij} هي تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر (i) إلى المركز (j) ولو فرضنا أن X_{ij} عبارة عن عدد الوحدات المراد نقلها من المصدر (i) إلى المركز (j) فإن النموذج الرياضي لمشكلة النقل يكتب على الصورة التالية:

$$\text{Min } Z = C_{11} X_{11} + C_{12} X_{12} + \ldots + C_{ij} X_{ij} + \ldots + C_{nm} X_{nm}$$

Subject To,

$$C_{11} X_{11} + X_{12} C_{12} + \ldots\ldots + C_{1m} X_{1m} = b_1$$

$$C_{21} X_{21} + X_{22} C_{22} + \ldots\ldots + C_{2m} X_{2m} = b_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \quad \vdots \quad \vdots$$

$$C_{n1} X_{n1} + X_{n2} C_{n2} + \ldots\ldots + C_{nm} X_{nm} = b_n$$

$$C_{11} X_{11} + X_{21} C_{21} + \ldots\ldots + C_{n1} X_{n1} = a_1$$

$$C_{21} X_{12} + X_{22} C_{22} + \ldots\ldots + C_{n2} X_{n2} = a_2$$

$$\vdots \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \vdots$$

$$C_{1m} X_{1m} + X_{2m} C_{2m} + \ldots\ldots + C_{nm} X_{nm} = a_m$$

$$X_{11}, X_{12}, X_{13}, \ldots\ldots X_{nm} \geq 0$$

ولإيجاد أقل تكلفة لمشكلة النقل سيكون من الصعوبة بمكان حل هذا النموذج الرياضي وذلك لكثرة القيود والمتغيرات ولكننا سنعرض فيما يلي طرقاً أسهل لحل هذه المشكلة.

طرق حل مشاكل النقل:

يقسم حل مشكلة النقل إلى مرحلتين:

1- الحل الأولي:

يمكن حل مشاكل النقل حلاً أولياً بإحدى الطرق التالية:

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية The North – West Cornner

2. طريقة أقل التكاليف The Least Costs Method

3. طريقة فوجل التقريبية The Vogel's Approximation Method (VAM)

وفيما يلي شرح لهذه الطرق.

1. طريقة الزاوية الشمالية الغربية: The North – West Cornner Method

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة. ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال:

إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاثة مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار الأردني)، وحجم الخزين في كل مخزن والإحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المراكز

المصادر		D_1	D_2	D_3	**العرض**
	S_1	5	1	8	12
	S_2	2	4	0	14
	S_3	3	6	7	4
	الطلب	9	10	11	30 / 30

جدول "2"

المطلوب: ما مجموع تكاليف النقل للسلعة من المصادر إلى المراكز باستخدام طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ملاحظة:

إن الأرقام الموجودة داخل المربعات الصغيرة في جدول "2" تمثل كلفة النقل بالدينار الأردني، فمثلاً كلفة نقل وحدة واحدة من المصدر (S_1) إلى مركز الطلب D_3 هي 8 دنانير.

خطوات الحل:

بداية يجب التأكد من توفر شرط التوازن أي أن مجموع العرض المتوفر في المصادر يساوي مجموع ما تطلبه المراكز التسويقية، من الجدول نلاحظ أنها متساوية حيث أن: 12 + 14+ 4 = 9 + 10 + 11=30

1. نأخذ الخلية الأولى والتي تقع في الصف الأول (الشمالي) والعمود الأول (الغربي) وهي الخلية (S_1 , D_1) ثم نقارن الكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_1 بالكمية المتوفرة لدى المصدر S_1 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_1 , D_1).

Min (12, 9) = 9

أي يتم تخصيص 9 وحدات للخلية (S_1 , D_1) وهذا يؤدي إلى سد إحتياجات المركز D_1 بالكامل، حيث يتم شطب العمود الأول وذلك يشير إلى أن التخصيصات للخلايا الأخرى في العمود ذاته تساوي صفر.

ملاحظة: أ. يتم تعديل العرض والطلب للجدول بعد كل عملية تلبية طلب ما.

ب. إن عملية النقل بموجب هذه الطريقة تستمر بنفس الصف حتى يتم إغلاقه ونفاذ جميع الكمية المتاحة في المصدر المقابل للصف المعنى.

2. نأخذ الخلية الثانية (S_1 , D_2) والتي تكون هي الآن في الزاوية الشمالية الغربية، ونقارن الكمية المتاحة لدى المصدر S_1 بالكمية المطلوبة من قبل مركز الطلب D_2 ونختار الأقل ونخصصها للخلية (S_1 , D_2).

Min (3 , 10) = 3

لذا نخصص 3 وحدات للخلية (S_1 , D_2).

3. نلاحظ هنا أن جميع الكميات المتوفرة لدى المصدر S_1 قد نفذت بالكامل، لذا نأخذ الخلية (S_2 , D_2) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_2 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2 ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2 , D_2).

$$\text{Min } (14 , 7) = 7$$

4. نأخذ الخلية (S_2 , D_3) ثم نقارن الكمية التي يحتاجها المركز D_3 بالكمية المتاحة لدى المصدر S_2، ونخصص أقل الكميتين للخلية (S_2 , D_3).

$$\text{Min } (7 , 11) = 7$$

5. وأخيراً نأخذ الخلية (S_3 , D_3)، ونخصص لها 4 وحدات وهي الكمية المتبقية لدى المركز S_3 والمطلوبة من قبل مركز الطلب D_3.

عند هذه المرحلة تكون جميع الكميات المتاحة لدى جميع المصادر قد نفذت، وبالتالي نكون قد وصلنا إلى جدول النقل بصيغته النهائية كالآتي:

المراكز

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5 / 9	1 / 3	8	~~12~~ ~~3~~ 0
S_2	2	4 / 7	0 / 7	~~14~~ ~~7~~ 0
S_3	3	6	7 / 4	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ 0	~~10~~ ~~7~~ 0	~~11~~ ~~4~~ 0	30 / 30

جدول "3"

6. نحسب إجمالي التكاليف (Total cost) = مجموع حاصل ضرب عدد الوحدات المنقولة في تكلفة نقل الوحدة لكل الجدول.

ويكون إجمالي تكاليف النقل طبقاً للجدول السابق:

Total Cost = 5 x 9 + 1 x 3 + 4 x 7 + 7 x 4 = 104 J.D

2. طريقة أقل التكاليف The Least Costs Method

إن إحدى مساوئ طريقة الزاوية الشمالية الغربية هو عدم تحقيق الإستفادة من التكلفة القليلة المتوفرة في مشكلة نقل معينة عند تلبية إحتياجات مراكز الطلب. لذا وضعت طريقة أقل التكاليف لمعالجة مثل هذا النوع من العيوب في نماذج النقل حيث يتم البحث والتركيز بموجب هذه الطريقة على أقل تكلفة متوفرة في جدول النقل ومن ثم تحديد جهتي الطلب والعرض.

سنعتمد على مثالنا السابق في توضيح الخطوات الرئيسية لطريقة أقل التكاليف.

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5	1	8	12
S_2	2	4	0	14
S_3	3	6	7	4
الطلب	9	10	11	30

جدول "4"

* نلاحظ أن أقل تكلفة في جدول النقل أعلاه هي الصفر، وهي تقابل المصدر S_2 والمركز D_3، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع ما يحتاجه مركز الطلب D_3، ثم نختار أقل الكميتين، ونخصصها للخلية (S_2 , D_3).

$$Min (14 , 11) = 11$$

ملاحظة:

نعدل العرض والطلب للجدول بعد كل عملية تخصيص معينة، كما هو الحال في طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

* نبحث عن أقل تكلفة ضمن القيم المتبقية في الجدول، فنجد أنها تساوي (1)، وهي تقع في الخلية (S_1, D_2) لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع ما يحتاجه المركز D_2، ثم نختار أقل الكميتين $Min (10 , 12) = 10$، ونخصصها للخلية (S_1 , D_2).
* التكلفة الأقل الأخرى ضمن الجدول تساوي 2 وتقع في الخلية (S_2 , D_1) لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_2 مع إحتياجات المركز D_1 ونختار أقل الكميتين $Min (3 , 9) = 3$، ونخصصها للخلية (S_2 , D_1).
* التكلفة الأقل التالية تساوي 3 وتقع ضمن الخلية (S_3 , D_1)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_3 مع إحتياجات المركز D_1 ونختار أقل الكميتين $Min (4 , 6) = 4$، ونخصصها للخلية (S_3 , D_1).
* التكلفة الأقل الأخيرة ضمن الجدول تساوي 5 وتقع في الخلية (S_1 , D_1)، لذا نقارن ما هو متوفر لدى المصدر S_1 مع إحتياجات مركز الطلب D_1 ونختار أقل الكميتين $Min (2 , 2) = 2$، ونخصصها للخلية (S_1 , D_1).

المراكز

	D_1	D_2	D_3	**العرض**
S_1	5 2	1 10	8	~~12~~ ~~2~~ 0
S_2	2 3	4	0 11	~~14~~ ~~3~~ 0
S_3	3 4	6	7	~~4~~ 0
الطلب	~~9~~ ~~6~~ ~~2~~ 0	~~10~~ 0	~~11~~ 0	

المصادر

جدول "5"

إن الجدول أعلاه يمثل جدول النقل بصيغته النهائية وبكلفة إجمالية تساوي 38 دينار حيث تم حسابها كالآتي:

Total Cost = 5 x 2 + 1 x 10 + 2 x 3 + 0 x 11 + 3 x 4 = 38 J.D

من خلال حسابنا للتكلفة الكلية لمشكلة النقل هذه بطريقة أقل التكاليف نلاحظ أن هذه الطريقة تكلفتها اقل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ملاحظة:

إذا كانت هناك في إحدى مراحل عملية المقارنة بين كلف النقل، كلفتين متساويتين فبالإمكان إختيار إحداهما عشوائياً.

3. طريقة فوجل التقريبية Vogel's Approximations Method (VAM)

تعتبر طريقة فوجل من أهم الطرق الثلاث على الإطلاق لما تتميز به هذه الطريقة من القدرة للوصول إلى الحل الأمثل أو الحل القريب من الحل الأمثل ونادراً ما تكون طريقتي أقل التكاليف والطريقة الشمالية الغربية أفضل من طريقة فوجل. لكن طريقة فوجل تحتاج إلى عمليات حسابية أطول مما تحتاجه طريقتا أقل التكاليف والزاوية الشمالية الغربية.

وتتلخص خطوات إيجاد الحل الأساسي الأولي بهذه الطريقة كما يلي:

1. حساب الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، وتأشير هذه الفروق على جانبي جدول الحل.
2. تحديد الصف أو العمود الذي يمتلك أكبر فرق في الكلفة (أعلى جزاء).
3. إختيار الخلية ذات الكلفة الأقل في ذلك الصف أو العمود.
4. في الخلية التي أختيرت في الخطوة "3" نقارن إحتياجات المركز مع ما هو متوفر في المصدر لنأخذ القيمة الأقل.
5. نعيد حساب الفرق مرة أخرى لكل من الأعمدة والصفوف ونكرر العملية السابقة إلى أن نلبي إحتياجات جميع مراكز الطلب من المصادر المتاحة.

ملاحظة:

عند تساوي الفروق في الصفوف والأعمدة نأخذ الفرق الثاني وذلك بشطب أقل قيمة من الصف والعمود ونأخذ الفرق الذي بعده، أما إذا كانت من البداية كل الفروق في الصفوف والأعمدة متساوية في كل المراحل تفشل طريقة فوجل ونأخذ طريقة أقل التكاليف.

سيتم توضيح طريقة فوجل بالإستعانة بمثالنا السابق، ثم بعد ذلك تتم المقارنة بين إجمالي التكاليف لهذه الطريقة بإجمالي التكاليف الذي تم الحصول عليها بموجب الطرق السابقة.

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
S_1	5	1	8	12	4
S_2	2	4	0	14	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	11	30	
فرق الأعمدة	1	3	7		

جدول "6"

* نجد الفرق في التكلفة للصفوف وللأعمدة كما هو مبين في الجدول "6".

* نلاحظ أن للعمود الثالث أكبر فرق والذي يساوي "7".

* نبحث عن أقل كلفة في العمود الثالث، فنجد أن للخلية (S_2, D_3) أقل كلفة والبالغة صفر.

* نقارن إحتياجات مركز الطلب D_3 مع الكمية المتاحة في المصدر S_2 ثم نختار أقل الكميتين Min (11 ., 14) = 11

مراكز الطلب

	D_1	D_2	D_3	العرض	
S_1	5	1	8	12	4
المصادر S_2	2	4	0 / 11	~~14~~ 3	2
S_3	3	6	7	4	3
الطلب	9	10	~~11~~ 0		
	1	3			

جدول "7"

* ويتم تعديل العرض والطلب في الجدول أعلاه، وهذه العملية تؤدي إلى تلبية كامل إحتياجات المركز D_3، لذا يشطب المركز D_3 من الجدول لغرض إعادة حساب الفروق بين التكاليف مرة أخرى.

* يتم حساب الفرق في الكلفة لكل صف وعمود في الجدول "7".

* نلاحظ أن للصف الأول أعلى فرق في الكلفة.

* نبحث عن أقل كلفة في الصف الأول، فنجد أن للخلية (S_1 , D_2) أقل كلفة والبالغة "1".

* نقارن إحتياجات مركز الطلب D_2 مع ما هو متاح من كميات لدى المصدر S_1، ثم نختار أقل الكميتين. $\text{Min}\ (12,10) = 10$

* يتم شطب مركز الطلب D_2، ولهذا السبب سوف لا يؤخذ بعين الإعتبار عند حساب الفرق في الكلفة في المراحل اللاحقة.

مراكز الطلب

المصادر		D_1	D_2	D_3	العرض	فرق الصفوف
	S_1	5	1 / 10	8	~~12~~ 2	4
	S_2	2	4	0 / 11	~~14~~ 3	2
	S_3	3	6	7	4	3
	الطلب	9	~~10~~	~~11~~	30	
	فرق الأعمدة	1				

جدول "8"

عند مرحلة الحل هذه لا نحتاج لحساب الفرق في الكلفة للصفوف والأعمدة بسبب وجود مركز طلب واحد وهو (D_1) والذي لم يحصل على إحتياجاته حتى الآن.

إن ما نحتاجه هنا هو البحث عن اقل كلفة في العمود الأول، والذي نلاحظ فيه أن المصدر S_2 يقابل أقل كلفة والتي تساوي 2 سيتم تخصيص كامل محتويات المصدر S_2 والبالغة "3" وحدات لتلبية جزء من إحتياجات مركز الطلب D_1، ويتم إلغاء المركز S_2.

من جهة أخرى بإمكان المصدر S_3 تلبية جزء من إحتياجات مركز الطلب D_1 وذلك بتوفير 4 وحدات فقط من إحتياجات D_1 البالغة "6" وحدات. وأخيراً يتم تخصيص آخر إحتياجات المركز D_1 والبالغة 2 وحدة من المصدر S_1. وبهذا يصبح نموذج النقل بصيغته النهائية بموجب طريقة فوجل كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D_1	D_2	D_3	العرض
S_1	5 / 2	1 / 10	8	---
S_2	2 / 3	4	0 / 11	---
S_3	3 / 4	6	7	---
الطلب	---	---	---	

جدول "9"

بموجب نموذج النقل أعلاه ستكون الكلفة الإجمالي كما يلي:

(Total Cost) = 5 x 2 + 1 x 10 + 2 x 3 + 0 x 11 + 3 x 4 = 38 J. D

ملاحظة:

في أغلب الأحيان تكون نتائج طريقتي فوجل، والتكلفة الأقل متقاربة أو متطابقة.

* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية = 104 دينار.

* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة أقل التكاليف = 38 دينار.

* الكلفة الإجمالية بموجب طريقة فوجل = 38 دينار.

نلاحظ أن الطريقتين الأخيرتين قد حققتا إقتصادا في مجموع التكاليف قدرة 66 دينار مقارنة بطريقة الزاوية الشمالية الغربية.

مثال: الجدول التالي يبين تكلفة نقل الوحدة الواحدة من سلعة معينة من ثلاثة مصادر إلى ثلاثة مراكز طلب، ويبين الجدول كذلك إمكانات المصادر وإحتياجات مراكز الطلب. بالإعتماد على هذا الجدول، أوجد الحل الأولي باستخدام:

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ب. طريقة أقل التكاليف.

ج. طريقة فوجل التقريبية.

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	2	1	8	10
S2	7	4	3	25
S3	6	2	4	20
الطلب	15	18	22	55

جدول "10"

الحل: أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

الحل الأولي باستخدام هذه الطريقة سيكون كما في الجدول التالي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	2 10	1	8	~~10~~ 0
S2	7 5	4 18	3 2	~~25~~ ~~20~~ ~~2~~ 0
S3	6	2	4 20	~~20~~ 0
الطلب	~~15~~ ~~5~~ 0	~~18~~ 0	~~22~~ ~~20~~ 0	

جدول "11"

إجمالي التكاليف للتوزيع أعلاه:

$2 \times 10 + 7 \times 5 + 4 \times 18 + 3 \times 2 + 4 \times 20 = 213$ J. D.

ب. طريقة أقل التكاليف:

الحل الأولي باستخدام هذه الطريقة هو:

مراكز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض
	S1	2	1 / 10	5	10 0
	S2	7 / 3	4	3 / 22	25 3 0
	S3	6 / 12	2 / 8	4	20 12 0
	الطلب	15 3 0	18 8 0	22 0	

جدول "12"

إجمالي التكاليف للتوزيع أعلاه:

$1 \times 10 + 7 \times 3 + 3 \times 22 + 6 \times 12 + 2 \times 8 = 185$ J. D

ج. طريقة فوجل التقريبية:

* نجد فرق الصفوف والأعمدة ونؤشرها على جانبي الجدول، ونختار أكبر فرق منها.

* أكبر فرق هو للعمود الأول، لذا نأخذ الخلية صاحبة أقل تكلفة في هذا العمود وهي (S1, D1) ونخصص لها 10 وحدات من الكمية المتاحة لدى المصدر S1 ونلغي الصف الأول لنفاذ الكمية المتاحة لدى المصدر S1.

مراكز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض	فرق الأعمدة
	S1	2 / 10	1	5	~~10~~ 0	1
	S2	7	4	3	25	1
	S3	6	2	4	20	2
	الطلب	~~15~~ 5	18	22		
	فرق الصفوف	4	1	1		

جدول "13"

* نظراً لإلغاء الصف الأول نعيد حساب فرق الصفوف لينتج لدينا الجدول التالي:

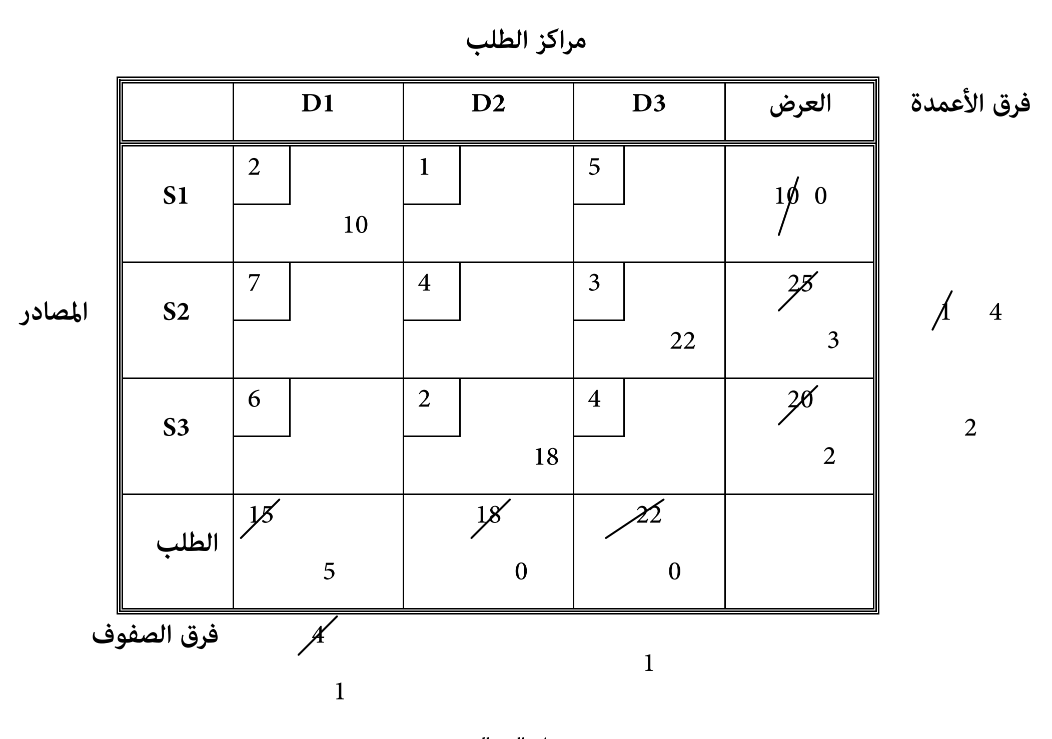
مراكز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض	فرق الأعمدة
	S1	2 / 10	1	5	~~10~~ 0	
	S2	7	4	3	25	1
	S3	6	2 / 18	4	~~20~~ 2	2
	الطلب	~~15~~ 5	~~18~~ 0	22		
	فرق الصفوف	~~4~~ 1	~~1~~ 2	1		

جدول "14"

* أكبر فرق هو للصف الثالث لذا نأخذ الخلية صاحبة اقل تكلفة في هذا الصف وهي (S3, D2) ونخصص لها 18 وحدة من الكمية المتاحة في المصدر S3، ونلغي العمود الثاني لأنه تمت تلبية كامل إحتياجات المركز D2.

* نظراً لإلغاء العمود الثاني نعيد حساب فرق الأعمدة لنحصل على الجدول التالي:



مراكز الطلب

المصادر		D1	D2	D3	العرض	فرق الأعمدة
	S1	2 / 10	1	5	~~10~~ 0	
	S2	7	4	3 / 22	~~25~~ 3	~~1~~ 4
	S3	6	2 / 18	4	~~20~~ 2	2
	الطلب	~~15~~ 5	~~18~~ 0	~~22~~ 0		
	فرق الصفوف	~~4~~ 1		1		

جدول "15"

أكبر فرق هو للصف الثاني، لذا نأخذ الخلية (S2, D3) وهي صاحبة أقل تكلفة ونخصص لها 22 وحدة من الكمية المتاحة في المصدر S2 ونلغي العمود الثالث لأنه تمت تلبية كامل إحتياجات مركز الطلب D3.

بقي لدينا مركز طلب واحد هو D_1 إحتياجاته 5 وحدات، ومصدرين هما S2 ، S3 إمكانياتهم على التوالي 3، 2 ولأن الخلية (S3, D1) هي صاحبة أقل تكلفة في العمود الأول لذا نخصص لها 2 وحدة هي كل الإمكانيات المتاحة في المصدر S3.

وأخيراً نخصص 3 وحدات للخلية (S2, D1) وهـي آخـر كميـة متـوفرة في المصـدر S2 ومطلوبـة مـن قبـل المصدر D1.

مما سبق نجد أن الحل الأولي لمسألة النقل هذه سيظهر بالشكل التالي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	2 10	1	5	~~10~~ 0
S2	7 3	4	3 22	~~25~~ ~~3~~ 0
S3	6 2	2 18	4	~~20~~ ~~2~~ 0
الطلب	~~15~~ ~~5~~ ~~3~~ 0	~~18~~ 0	~~22~~ 0	

جدول "61"

إجمالي التكاليف:

$$10 \times 2 + 3 \times 7 + 22 \times 3 + 2 \times 6 + 18 \times 2 = 155 \text{ J.D.}$$

نلاحظ من هذا المثـال أن طريقـة فوجـل أعطـت أقـل إجـمالي تكـاليف والـذي يعنـي أن هـذه الطريقة أفضل من طريقة الزاوية الشمالية الغربية وطريقة أقل التكاليف.

نموذج النقل غير المتوازن:

لقد ذكرنا سابقاً ان مجموع قيم العرض يجب أن تكون مساوية لمجموع قـيم الطلـب ولكـن في بعض الحالات قد تكون هذه القيم غير متساوية وبالتالي يكون النموذج

غير متوازن ولكي نوازن النموذج نضيف إلى الأقل، قيمة الفرق وتكون التكلفة الموازية لها أصفار فإذا:

1. كان العرض أكثر من الطلب فإننا نضيف إلى الجدول عمود آخر تكون فيه التكاليف = صفر وقيمة الفرق ونحل النموذج بأي طريقة من الطرق الثلاث السابقة.

2. كان العرض أقل من الطلب نضيف صف آخر بنفس الطريقة تكون التكاليف فيه أصفار وقيمة الفرق ونوازن النموذج.

مثال: وازن نموذج النقل التالي، ثم جد الحل الأولي بطريقة أقل التكاليف:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	2	1	3	100
S2	5	4	0	150
S3	2	3	6	50
الطلب	100	120	60	300 / 280

جدول "17"

نلاحظ هنا أن مجموع قيم العرض = 300، ومجموع قيم الطلب = 280، وبالتالي نضيف عمود آخر قيمة الطلب فيه = 20، والتكاليف = صفر، كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2	1	3	0	100
S2	5	4	0	0	150
S3	2	3	6	0	50
الطلب	100	120	60	20	300 / 300

جدول "81"

ويكون الحل الأولي للنموذج بطريقة أقل التكاليف هو:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	2	1 100	3	0	~~100~~ 0
S2	5 50	4 20	0 60	0 20	~~150~~ ~~90~~ ~~70~~ 0
S3	2 50	3	6	0	~~50~~ 0
الطلب	~~100~~ ~~50~~ 0	~~120~~ ~~20~~ 0	~~60~~ 0	~~20~~ 0	300 / 300

جدول "19"

Total Cost = 100 + 250 + 80 + 100 = 530 J. D.

ملاحظة : عند الحل بطريقة أقل التكاليف يكون العمود أو الصف المضاف آخر ما يشغل.

مثال "2": وزان نموذج النقل التالي، ثم جد التكلفة الكلية بطريقة فوجل:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	0	1	2	120
S2	2	3	5	100
الطلب	100	100	50	

جدول "20"

نلاحظ أن الطلب أكثر وبالتالي نضيف صف قيمته 30 وتكاليفه = صفر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	0	1	2	120
S2	2	3	5	100
S3	0	0	0	30
الطلب	100	100	50	

جدول "21"

ويكون الحل الأولي للتكلفة الكلية بطريقة فوجل هو:

مراكز الطلب

		D1	D2	D3	العرض	الفرق
	S1	0 / 100	1	2 / 20	100 120 0	1
المصادر	S2	2	3 / 100	5	100 0	1
	S3	0	0	0 / 30	30 0	0 -
	الطلب	100 0	100 0	50 20 0		
	الفرق	0 2	1 2	2 3		

جدول "22"

Total Cost = 300 + 40 = 340 J. D.

2- الوصول للحل الأمثل

إن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية المشكلة وإنما يجب أن تستخدم أساليب أخرى لإختبار هل الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق إحدى الطرق السابقة هو الحل الأمثل، أي الحل الوحيد الذي لا يمكن إيجاد حل افضل منه أم أن هناك حلولاً أمثل منه؟ هنا طريقتان لإختبار أمثلية الحل هما:

1. طريقة المسار المتعرج "طريقة الحجرالمتنقل" The Stepping Stone Method
2. طريقة التوزيع المعدلة Modified Distribution Method (Modi)

قبل تطبيق أي من الطريقتين سنطبق في البداية :

يجب تطبيق قاعدة التوزيع وهي:

قاعدة التوزيع : عدد الخلايا المشغولة = عدد الصفوف + عدد الاعمدة – 1

$$OC = m + n - 1$$

1. طريقة المسار المتعرج:

تقضي طريقة المسار المتعرج بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول (الحل الأولي) لمعرفة أثر إستخدام كل خلية فارغة على مجموع التكاليف ويتم ذلك من خلال عمل مسار مغلق لكل خلية فارغة.

وإذا وجدنا أن ملء خلية معينة فارغة سيؤدي إلى تقليل تكاليف النقل فإن جدول النقل يتم تعديله للإستفادة من ذلك.

وتستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تقليل تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها.

القواعد الواجب مراعاتها عند تكوين المسار المغلق:

1. يجب ان يبدأ وينتهي المسار المغلق عند الخلية الفارغة المراد تقييمها.
2. يجب أن يتألف المسار المغلق من مجموعة من المستقيمات الأفقية والعمودية بحيث تقع الخلايات المشغولة عند الزوايا القائمة للمسار المغلق.
3. وجود مسار مغلق واحد لكل خلية غير مشغولة.
4. نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة عند زوايا الشكل الناتج من تكلفة نقل الوحدة ونضع اشارات المسار بحيث تكون اشارة خلية البداية موجب والخلية التي تليها في المسار سالب ثم موجب ثم سالب وهكذا حتى ينتهي المسار.
5. حتى يكون الحل أمثلاً يجب ان تكون التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة قيمة موجبة أو مساوية للصفر.

مثال: فيما يلي جدول الحل الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 / 9	1 / 3	8	12
S2	2	4 / 7	0 / 7	14
S3	3	6	7 / 4	4
الطلب	9	10	11	

جدول "23"

المطلوب: إيجاد الحل الأمثل مستخدماً طريقة المسار المتعرج.

الحل: تطبيق قاعدة التوزيع : $OC = 5$

$$m + n - 1 = 3 + 3 - 1 = 5$$

$$\therefore\ OC = m + n - 1$$

ثم من الجدول "23" يتضح وجود أربعة خلايا فارغة هي الخلايا:

(S1, D3), (S2, D1), (S3, D1), (S3, D2)

ويتم تقييم أثر شغل كل من تلك الخلايا الفارغة وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية كالآتي:

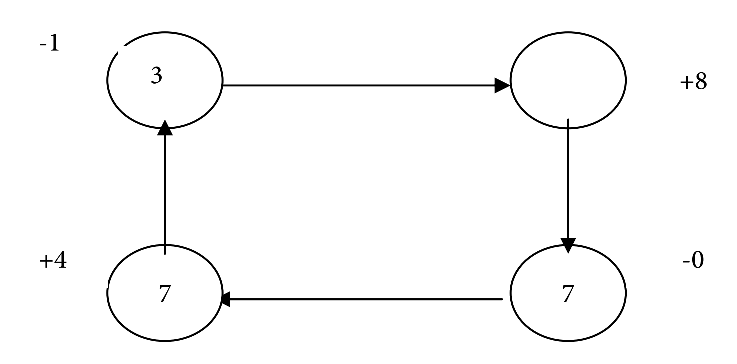
1. تكوين مسار مغلق لكل خلية غير مشغولة.
2. يتم وضع إشارة زائد (+) للخلية المراد تقيمها ثم إشارة ناقص (-) للخلية التي تليها في المسار، ثم إشـارة زائد للخلية التالية في المسار، وهكذا تتالي الإشارة الموجبة والسالبة حتى نصل إلى الخلية التي بدأناها.
3. نقوم بحساب التكلفة غير المباشرة للخلية (تقييم الخلية)، وذلك بجمع كلف جميع الخلايا الواقعة عـلى زوايا المسار بعد وضع الإشارات عليها.
4. إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما بالسـالب فـإن ذلـك يعنـي أن إشـغال تلـك الخليـة سـيؤدي إلى خفض تكاليف النقل.
5. في حالة وجود أكثر من خلية فارغة لها تكلفة غير مباشرة بالسالب فإنه تعطي الأولوية للخليـة صـاحبة أكثر سالبية، حيث ان شغل تلك الخلية يكون أكثر فاعلية في خفض التكاليف.
6. يتم إشغال الخلية الفارغة من الخلايا المشغولة بحيث نطرح أقل تعبئة في السالبة مـن الخلايـا السـالبة ونضيفها إلى الموجبة.

الخلية (S1 , D3):

المسار المغلق:

$(S1, D3) \rightarrow (S2, D3) \rightarrow (S2, D2) \rightarrow (S1, D2)$

التكلفة غير المباشرة: $+8 - 0 + 4 - 1 = 11 \geq 0$



المسار المغلق للخلية (S1, D3)

ملاحظة:

1. الأرقام داخل الدوائر (في الشكل أعلاه) تمثل محتويات كل خلية مشغولة.

2. الأرقام التي خارج الدوائر تمثل تكلفة كل خلية من الجدول "23".

الخلية (S2, D1):

المسار المغلق:

(S2, D1) → (S2, D2) → (S1, D2) → (S1, D1)

التكلفة غير المباشرة: $+2 - 4 + 1 - 5 = -6$

الخلية (S3, D2):

المسار المغلق:

(S3, D2) → (S3, D3) → (S2, D3) → (S2, D2)

التكلفة غير المباشرة: $+6 - 7 + 0 - 4 = -5$

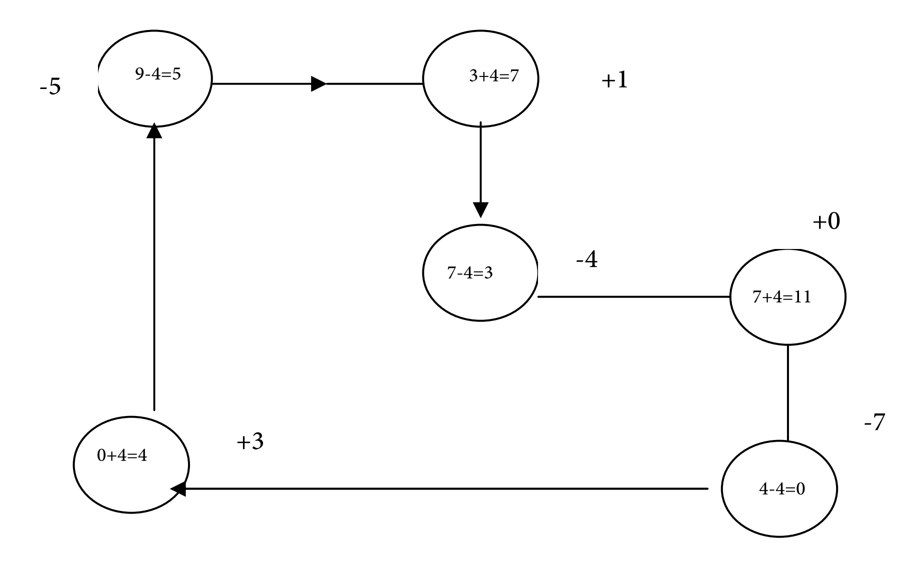
الخلية (S3, D1):

المسار المغلق:

(S3, D1) → (S1, D1) → (S1, D2) → (S2, D2) → (S2, D3) → (S3, D3)

التكلفة غير المباشرة: 12- = 7 - 0 + 4 – 1 + 5 – 3+

وباستعراض قيم التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة نجد أن تكاليف النقل الكلية يمكن تخفيضها في حالة شغل الخلية (S3, D1) حيث أن لها أقل تكلفة غير مباشرة بالسالب وتتحدد الكمية التي ستنقل إلى الخلية (S3, D1) من الخلايا المشغولة على أساس أقل مقدار في الخلايا المشغولة (الأرقام داخل الدوائر في الشكل أدناه) التي إشارتها سالبة في المسار المغلق للخلية (S3, D1).



المسار المغلق للخلية (S3, D1)

وبدراسة الخلايا التي يمكن النقل منها إلى الخلية (S3, D1) نجد أنه يمكن النقل من الخلية (S1, D1) أو (S2, D2) أو (S3, D3) (حيث أن قيم التكلفة لها في المسار سالبة، لاحظ الأرقام الموجودة فوق الدوائر في الشكل أعلاه) وحفاظاً على عدم سالبية الخلايا نأخذ أقل تعبئة في الخلايا السالبة وهي 4 . ونجمعها إلى القيم في الخلايا الموجبة، ونطرحها من القيم في الخلايا السالبة. ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق (S3, D1) حيث تصبح كالآتي:

(S1, D1): 9 – 4 = 5

(S1, D2): 3 + 4 = 7

(S2, D2): 7 – 4 = 3

(S2, D3): 7 + 4 = 11

(S3, D3): 4 – 4 = 0

(S3, D1): 0 + 4 = 4

ويمكن تصور جدول النقل الثاني بعد إجراء التعديل السابق الذكر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	5 / 5	1 / 7	8	12
S2	2	4 / 3	0 / 11	14
S3	3 / 4	6	7	4
الطلب	9	10	11	

جدول "24"

وعليه فإن تكاليف النقل الكلية طبقاً لجدول النقل الثاني هي:

5 X 5 + 1 X 7 + 4 X 3 + 0 X 11 + 3 X 4 + 6 X 0 = 25 + 7 + 12 + 12 = 56 J.D

كانت الكلفة الكلية بموجب طريقة الزاوية الشمالية الغربية J. D (104) في حين بلغت الكلفة الإجمالية بعد التعديل بموجب طريقة المسار المتعرج (J. D 56) أي هناك إقتصاد في الكلفة ما قيمته (48 J. D) نتيجة شغل الخلية (S3, D1) وهذا الحل (جدول 24) كسابقه، يتطلب التأكد من كونه يمثل الحل الأمثل المنشود أم لا.

بمعنى آخر هل هناك إمكانية للحصول على نتائج أفضل من النتيجة السابقة والبالغة (J. 56 D).

إختبار مثالية جدول النقل الثاني:

يتم إختبار مثالية جدول النقل الثاني (جدول 24) السابق ذكره طبقاً لنفس القواعد السابقة والتي تتمثل في دراسة آثار شغل الخلايا الفارغة على التكلفة الكلية وذلك على النحو التالي:

الخلية (S1, D3):

المسار المغلق:

$(S1, D3) \rightarrow (S2, D3) \rightarrow (S2, D2) \rightarrow (S1, D2)$

التكلفة غير المباشرة: $+8 - 0 + 4 - 1 = +11$

الخلية (S2, D1):

المسار المغلق:

$(S2, D1) \rightarrow (S1, D1) \rightarrow (S1, D2) \rightarrow (S2, D2)$

التكلفة غير المباشرة: $2 - 5 + 1 - 4 = -6$

الخلية (S3, D2):

المسار المغلق:

(S3, D2) ⟶ (S1, D2) ⟶ (S1, D1) ⟶ (S3, D1)

التكلفة غير المباشرة: 7 = 3 – 5 + 1 – 6

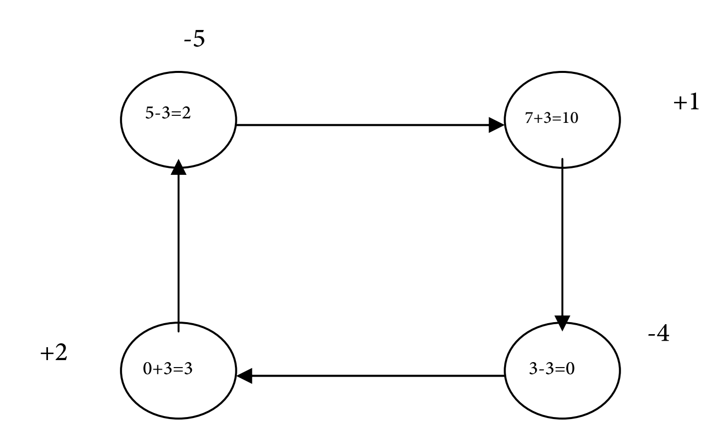
الخلية (S3 , D3) :

المسار المغلق:

(S3, D3) ⟶ (S2, D3) ⟶ (S2, D2) ⟶ (S1, D2) ⟶ (S1 , D1) ⟶ (S3 , D1)

التكلفة غير المباشرة : 12 = 3 – 5 + 1 – 4 + 0 – 7

وبدراسة آثار شغل الخلايا الفارغة السابقة يتضح لنا أنه يمكن تخفيض تكاليف النقل في حالة ملء الخلية (S2, D1).



المسار المغلق للخلية (S2, D1)

وبالنظر إلى المسار المغلق للخلية (S2, D1) نجد أنه يمكن النقل إليها من الخلية (S2, D2) بمقدار 3 وحدات أو من الخلية (S1, D1) بمقدار 5 وحدات.

وهي الخلايا ذات الإشارات السالبة في المسار المغلق للخلية (S2, D1) وطبقاً لما سبق ذكره نأخذ أقل القيمتين في هاتين الخليتين وهي 3 وحدات ويترتب على ذلك تغير في قيم الخلايا المذكورة في المسار المغلق لخلية (S2, D1) حيث تصبح كالآتي:

(S1, D1): 5 – 3 = 2

(S2, D2): 3 – 3 = 0

(S1, D2): 7 + 3 = 10

(S2, D1): 0 + 3 = 3

ويمكن تصور جدول النقل الثالث بعد إجراء التعديل السابق الذكر كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	**D2**	**D3**	**العرض**
S1	5 2	1 10	8	-
S2	2 3	4	0 11	-
S3	3 4	6	7	-
الطلب	-	-	-	

جدول "25"

وتكون تكاليف النقل طبقاً للجدول الثالث السابق عرضه كالآتي:

Total Cost = 5 x 2 + 1 x 10 + 2 x 3 + 0 x 11 + 3 x 4

= 10 + 10 + 6 + 12 = 38 J. D.

نلاحظ هنا أن شغل الخلية (S2, D1)، أدى إلى الإقتصاد في إجـمالي التكـاليف بمقـدار 18 دينـار (أي 18 = 38 – 56) .

إختبار مثالية الحل لجدول النقل الثالث:

يتم إختبار جدول النقل الثالث رقم "25" بنفس الطريقة السابقة كالآتي:

الخلية (S1 , D3):

المسار المغلق:

(S1, D3) → (S2, D3) → (S1, D2) → (S1, D1)

التكلفة غير المباشرة: 5 = 5 – 2 + 0 – 8

الخلية (S3, D2):المسار المغلق:

(S3, D2) → (S3, D1) → (S2, D1) → (S2, D2) → (S3, D2)

التكلفة غير المباشرة: 1 = 4 – 2 + 3 – 6+

الخلية (S2 , D2) : المسار المغلق :

(S2, D2) → (S2, D1) → (S1, D1) → (S1, D2)

التكلفة غير المباشرة : 6 = 1 – 5 + 2 – 4

الخلية (S3 , D3) : المسار المغلق

(S3, D3) → (S2, D3) → (S2, D1) → (S3, D1)

التكلفة غير المباشرة : 6 = 3 – 2 + 0 – 7

من العرض السابق يتضح لنا أن شغل أي من الخلايا الفارغـة لـن يخفـض التكـاليف، حيـث أن التكلفة غير المباشرة لكل منها هي أرقام موجبة ولذلك فإن جدول النقل

(رقم 25) يمثل الحل الأمثل ويعطينا الخطة المثلى لتوزيع وحدات السلعة من المصادر الثلاثة إلى مراكز التوزيع الثلاثة.

لاحظ أن جدول النقل "25" والذي حصلنا عليه باستخدام طريقة المسار المتعرج هو نفس جدول الحل الذي حصلنا عليه سابقاً عند استخدامنا لطريقة أقل التكاليف وهذا يدل على أن طريقة أقل التكاليف تعطي في أغلب الأحيان الحل الأمثل لمشكلة النقل.

ملاحظة:

إذا كانت التكلفة غير المباشرة لخلية ما صفراً فإن هذا يعني أن شغل هذه الخلية لن يؤثر على إجمالي التكاليف زيادة أو نقصان.

مثال "2": في جدول النقل التالي:

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض
S1	5	2	4	3	11	1200
S2	0	6	1	0	2	1400
S3	9	5	0	10	2	700
S4	8	5	6	0	3	800
S5	12	6	5	7	1	900
الطلب	1500	600	1100	1400	400	

جدول "26"

جـــد:

1. تكلفة النقل الأولية بطريقة فوجل.
2. الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

الحل:

1. طريقة فوجل في إيجاد الحل الأولي:

	D1	D2	D3	D4	D5	العرض	الفرق
S1	5 10 0	2 600	4	3 500	11	1200 1100 500 0	1
S2	0 1400	6	1	0	2	1400 0	0 -
S3	9	5	0 700	10	2	700 0	2 5 -
S4	8	5	6	0 800	3	800 0	3 5 -
S5	1 2	6	5 400	7 100	1 400	900 100 500 0	4 1
الطلب	1500 100 0	600 0	1100 400 0	1400 100 600 0	400 0	5000 5000	
الفرق	5 3 7 -	3 4 -	1 4 1	0 3 4	1 -		

جدول "27"

Total Cost = 500 + 1200 + 1500 + 2000 + 700 + 400

= 6300 J. D.

2. طريقة المسار المتعرج:

نطبق في البداية قاعدة التوزيع

OC = m + n – 1

9 = 5 + 5 – 1 = 9

ثم نجد المسارات لكل خلية فارغة فتكون:

للخلية (S1 , D3): (S1, D3) → (S5, D3) → (S5, D4) → (S1, D4)

4 – 5 + 7 – 3 = 3

للخلية (S1, D5): (S1, D5) → (S5, D5) → (S5, D4) → (S1, D4)

11 – 1 + 7 – 3 = 14

للخلية (S2 , D2): (S2, D2) → (S1, D2) → (S1, D1) → (S2, D1)

6 – 2 + 5 – 0 = 9

للخليــة (S2 , D3): (S2, D3) → (S5, D3) → (S5, D4) → (S1, D4)→ (S1 , D1) → (S2, D1)

1 – 5 + 7 – 3+5 – 0 = 5

للخلية (S2 , D4): (S2, D4) → (S1, D4) → (S1, D1) → (S2, D1)

0 – 3 + 5 – 0 = 2

للخلية (S2 , D5): (S2 , D5) → (S5 , D5) → (S5 , D4) → (S1 , D4) →

(S1 , D1) → (S2 , D1)

2 – 1 + 7 – 3 + 5 – 0 = 10

للخليــة (S3 , D1): (S3, D1) → (S1, D1) → (S1, D4) → (S5, D4)→ (S5, D3) → (S3, D3)→

9 – 5 + 3 - 7 + 5 – 0 = 5

للخليــة (S3 , D2): (S3, D2) → (S1, D2) → (S1, D4) → (S5, D4)→ (S5, D3) → (S3, D3)

5 – 2 + 3 – 7 + 5 – 0 =4

للخلية (S3 , D4): (S3, D4) → (S5, D4) → (S5, D3) → (S3, D3)

10 – 7 + 5 – 0 = 8

للخلية (S4 , D3): (S4, D3) → (S4, D4) → (S5, D4) → (S5, D3)

6 – 0 + 7 – 5 = 8

للخلية (S3 , D5): (S3, D5) → (S5, D5) → (S5, D3) → (S3, D3)

2 – 1 + 5 – 0 = 6

للخلية (S4 , D1): (S4, D1) → (S1, D1) → (S1, D4) → (S4, D4)

8 – 5 + 3 – 0 = 6

للخلية (S4 , D2): (S4, D2) → (S1, D2) → (S1, D4) → (S4, D4)

5 – 2 + 3 – 0 = 6

للخلية (S4 , D5): (S4, D5) → (S5, D5) → (S5, D4) → (S4, D4)

3 – 1 + 7 – 0 = 9

للخلية (S5 , D1): (S5, D1) → (S1, D1) → (S1, D4) → (S5, D4)

12 – 5 + 3 – 7 = 3

للخلية (S5 , D2): (S5, D2) → (S1, D2) → (S1, D4) → (S5, D4)

6 – 2 + 3 – 7 = 0

نلاحظ أن جميع الخلايا الفارغة موجبة أو صفر وبالتالي يكون الحل الأولي حلاً أمثلاً.

وتكون أقل تكلفة Minimum Cost = 6300 J. D.

طريقة التوزيع المعدلة: The Modifieded Distributed Method (Modi)

ناقشنا فيما سبق كيفية استخدام طريقة المسار المتعـرج في إختبـار مثاليـة جـدول الحـل الأولي. وندرس هنا طريقة أخرى بديلة لإختبار المثالية وهي طريقة التوزيع المعدلة (Modi).

وتتلخص خطوات هذه الطريقة لإختبار مثالية الحل كالآتي:

1. نطبق قاعدة التوزيع كما في السابق.
2. يتم تكوين معادلات بواقع معادلة لكل خلية مشغولة في جـدول الحـل الأولي وتعـد كـل معادلـة عـلى اساس العلاقة التالية:

$$U_i + V_j = C_{ij}$$

U_i = المتغير الخاص بالصف i والذي تقع فيه الخلية المعنية.

V_j = المتغير الخاص بالعمود j والذي تقع فيه الخلية المعنية.

C_{ij}= تكلفة الخلية التي تقع في الصف I والعمود j.

3. إيجاد حل المعادلات الخاصة بالخلايا المشغولة والسابق ذكرها في خطوة "1".
4. يتم تقييم كل خلية غير مشغولة (حساب التكلفة غير المباشرة لها) وفقاً للمعادلة التالية:

التكلفة غير المباشرة للخلية (i, j) = $C_{ij} - (U_i + V_j)$. ويجب أن تكـون اكـبر مـن أو تسـاوي صفر لكل الخلايا الفارغة حتى يكون الحل أمثل.

5. اذا كان هناك خلايا سالبة نأخذ الخلية الأكثر سالبية ونعدل تعبئتها كما في طريقة المسار المتعرج.

ولإيضاح ما تقدم سنقوم بعمل إختبار المثالية لجدول النقـل الأولي في طريقـة الزاويـة الشـمالية والغربية، والذي سبق التعامل معه في طريقة المسار المتعرج.

مراكز الطلب

العرض

	D1	D2	D3	العرض
S1	5 / 9	1 / 3	8	-
S2	2	4 / 7	0 / 7	-
S3	3	6	7 / 4	-
الطلب	-	-	-	

جدول "28"

نطبق قاعدة التوزيع أولا حيث : $5 = 3 + 3 - 1 = 5$

يلاحظ من الجدول أعلاه أن هناك خمسة خلايا مشغولة هي:

(S1, D1), (S1, D2), (S2, D2), (S2, D3), (S3, D3)

لذلك يتم تكوين المعادلات التالية لتلك الخلايا على التوالي:

$$U1 + V1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$U1 + V2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$U2 + V2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$U2 + V3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

$$U3 + V3 = 7 \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ولحل المعادلات السابقة نفترض أن قيمة أي متغير وليكن U1 تساوي صفر (وذلك لأن عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات وكما هو معروف فإنه إذا كانت عدد المتغيرات أكبر من عدد المعادلات فإن بعض من هذه المتغيرات يجب أن يساوي صفر) بناء على ذلك نجد أن:

$$O + V1 = 5 \quad \Rightarrow V1 = 5$$

$$O + V2 = 1 \quad \Rightarrow V2 = 1$$

$$U2 + 1 = 4 \quad \Rightarrow U2 = 4 - 1 = 3$$

$$3 + V3 = 0 \quad \Rightarrow V3 = -3$$

$$U3 + (-3) = 7 \quad \Rightarrow U3 = 10$$

أي أن قيم المتغيرات هي:

$U1 = 0$, $U2 = 3$, $U3 = 10$

$V1 = 5$, $V2 = 1$ $V3 = -3$

وعلى ذلك يتم تقييم الخلايا الفارغة في الجدول "28" وذلك بحساب التكلفة غير المباشرة لكل خلية فارغة كما يلي:

التكلفة غير المباشرة للخلية (S1, D3) $= C13 - (U1 + V3)$

$= 8 - (0 + (-3)) = 8 + 3 = 11$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S2, D1) $= C21 - (U2 + V1)$

$= 2 - (3 + 5) = -6$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S3, D1) $= C31 - (U3 + V1)$

$= 3 - (10 + 5) = -12$

التكلفة غير المباشرة للخلية (S3, D2) $= C32 - (U3 + V2)$

$= 6 - (10 + 1) = -5$

وبمقارنة النتائج أعلاه مع ما سبق لنا الحصول عليه عند تقييم جدول الحل الأولي باستخدام طريقة المسار المتعرج يتضح لنا تطابق النتائج في الطريقتين.

لذا يتم عمل جدول نقل جديد عن طريق شغل الخلية (S3, D1) باعتبارها صاحبة أكبر رقم سالب.

وتتم عملية شغل هذه الخلية طبقاً لما سبق شرحه في طريقة المسار المتعرج. وتتوالي عملية إختبار المثالية بكل جدول جديد بطريقة التوزيع المعدلة وبنفس الخطوات السابق ذكرها.

مثال "2":

في جدول النقل التالي:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	5	1	0	4	100
S2	7	5	2	3	50
S3	6	10	9	0	75
S4	2	4	1	6	25
الطلب	20	100	30	100	250

جدول "29"

جـد:

1. الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف.
2. الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

الحل:

1. الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	5	1 — 70	0 — 30	4	~~100~~ 70 ~~0~~
S2	7	5 — 25	2	3 — 25	~~50 25~~ 0
S3	6	10	9	0 — 75	~~75~~ 0
S4	2 — 20	4 — 5	1	6	~~25~~ ~~5~~ 0
الطلب	~~20~~ 0	~~100 30 25~~ ~~0~~	~~30~~ 0	~~100 25~~ 0	

جدول "30"

تكلفة النقل الكلي هي:

TOTAL Cost = 70 + 125 + 75 + 40 + 20

= 330 J. D.

2. إختبار الحل الأمثل:

في البداية نطبق قاعدة التوزيع : 7 = 1 – 4 + 4 = 7

ثم تشكل المعادلات كالآتي:

$U1 + V2 = 1$

$U1 + V3 = 0$

$U2 + V2 = 5$

$$U2 + V4 = 3$$

$$U3 + V4 = 0$$

$$U4 + V1 = 2$$

$$U4 + V2 = 4$$

وبحل المعادلات: نفرض $U1 = 0$

$$U1 + V2 = 1 \quad \Rightarrow V2 = 1$$

$$O + V3 = 0 \quad \Rightarrow V3 = 0$$

$$U2 + 1 = 5 \quad \Rightarrow U2 = 4$$

$$4 + V4 = 3 \quad \Rightarrow V4 = -1$$

$$U3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow U3 = 1$$

$$U4 + 1 = 4 \quad \Rightarrow U4 = 3$$

$$3 + V1 = 2 \quad \Rightarrow V1 = -1$$

نختبر الخلايا الفارغة بالعلاقة $Cij - (Ui + Vj)$

$$C11 - (U1 + V1) = \quad 5 - (0 + (-1)) = 6$$

$$C14 - (U1 + V4) = \quad 4 - (0 + 6 -1) = 5$$

$$C21 - (U2 + V1) = \quad 7 - (4 + -1) = 4$$

$$C23 - (U2 + V3) = \quad 2 - (4 + 0) = -2$$

$$C31 - (U3 + V1) = \quad 6 - (1 + (-1)) = 6$$

$$C32 - (U3 + V2) = \quad 10 - (1 +1) = 8$$

$$C33 - (U3 - V3) = \quad 9 - (1 + 0) = 8$$

$$C43 - (U4 + V3) = \quad 1 - (3 + 0) = -2$$

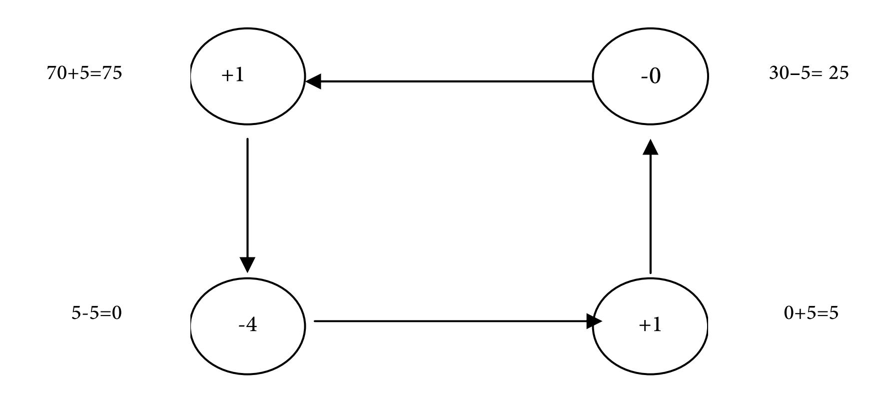
$$C44 - (U4 + V4) = \quad 6 - (3 + (-1)) = 4$$

نلاحظ هنا أن خليتين من الخلايا الفارغة كانت قيمتاهما بالسالب وهما (C23)، (C43).

يكون مسار الخلية (C43) هو:

(S4, D3) → (S4, D2) → (S1, D2) → (S1, D3)

نعيد تغيير قيم المسار بحيث تصبح الخلية (C43) خلية مشغولة فيصبح حيث:



	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	5	1 / 75	0 / 25	4	-
S2	7	5 / 25	2	3 / 25	-
S3	6	10	9	0 / 75	-
S4	2 / 20	4	1 / 5	6	-
الطلب	-	-	-	-	

جدول "31"

وبحساب التكلفة الاجمالية لهذا الجدول تكون

Total Cost = 75 + 0 + 125 + 75 + 0 + 40 + 5 = 320 JD

وبهذا نرى أننا حصلنا وفر مقداره (10) دنانير.

ثم نختبر الحل للجدول "31" باستخدام طريقة التوزيع المعدلة كالآتي:

$$U1 + V2 = 1$$

$$U1 + V3 = 0$$

$$U2 + V2 = 5$$

$$U2 + V4 = 3$$

$$U3 + V4 = 0$$

$$U4 + V1 = 2$$

$$U4 + V3 = 1$$

بجعل U1 = 0 نجد قيم باقي المتغيرات:

$$O + V2 = 1 \quad \Rightarrow V2 = 1$$

$$O + V3 = 0 \quad \Rightarrow V3 = 0$$

$$U2 + 1 = 5 \quad \Rightarrow U2 = 4$$

$$4 + V4 = 3 \quad \Rightarrow V4 = -1$$

$$U3 + -1 = 0 \quad \Rightarrow U3 = 1$$

$$U4 + 0 = 1 \quad \Rightarrow U4 = 1$$

$$1 + V1 = 2 \quad \Rightarrow V1 = 1$$

نختبر الخلايا الفارغة:

$$C11 - (U1 + V1) = \quad 5 - (0 + 1) = 4$$

$$C14 - (U1 + V4) = \quad 4 - (0 + (-1)) = 5$$

C21 – (U2 + V1) =   7 – (4 + 1)   = 2

C23 – (U2 + V3) =   2 – (4 + 0) = -2

C31 – (U3 + V1) =   (6 – 1 + 1)   = 4

C32 – (U3 + V2) =   10 – (1 +1) = 8

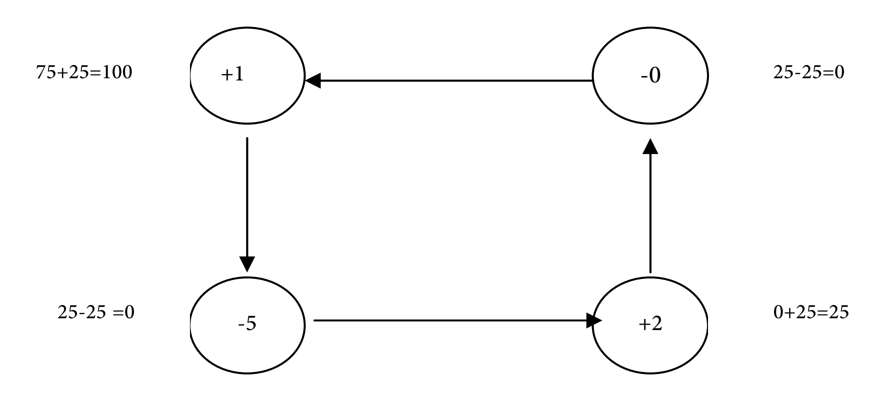
C33 – (U3 + V3) =   9 – (1 + 0)   = 8

C42 – (U4 + V2) =   4 – (-1 + 1)   = 4

C44 – (U4 + V4) =   6 – (1 + (-1)) = 6

نلاحظ هنا أن خلية واحدة بقيت سالبة وهي الخلية (C23) ومسارها هو:

(S2, D3) → (S2, D2) → (S1, D2) → (S1, D3)



وبتعبئة الخلية الفارغة من مسارها يصبح جدول الحل كالآتي:

	D1	D2	D3	D4	العرض
S1	5	1 / 100	0 / 0	4	-
S2	7	5	2 / 25	3 / 25	-
S3	6	10	9	0 / 75	-
S4	2 / 20	4	1 / 5	6	-
الطلب	-	-	-	-	

جدول "32"

Total Cost = 100 + 50 + 75 + 40 + 5 = 270 J.D.

وفي هذه الحالة كان الوفر (50) ديناراً .

نلاحظ هنا ان قاعدة التوزيع غير مطبقة بحيث أن عدد الخلايا المشغولة = 6

بينما عدد الصفوف + عدد الاعمدة - 1 = 4 + 4 – 1 = 7

ولتطبيق قاعدة التوزيع نشغل خلية فارغة بالقيمة صفر وليس هناك أي قاعدة محدد لاشغال الخلية وبالتالي سنشغل الخلية (S1 , D3)

فتكون معادلات الخلايا المشغولة هي :

$U1 + V2 = 1$

$U1 + V3 = 0$

$U2 + V3 = 2$

$U2 + V4 = 3$

$U3 + V4 = 0$

$U4 + V1 = 2$

$U4 + V3 = 1$

نجعل $U1 = 0$ ونجد باقي المتغيرات لتكون :

$U1 = 0$	$V1 = 1$
$U2 = 2$	$V2 = 1$
$U3 = -1$	$V3 = 0$
$U4 = 1$	$V4 = 1$

التكلفة غير المباشرة للخلايا الفارغة

$C11 = 5 - (0 + 1) = 4$

$C14 = 4 - (0 + 1) = 3$

$C21 = 7 - (2 + 1) = 4$

$C22 = 5 - (2 +1) = 2$

$C31 = 6 - (-1 + 1) = 6$

$C32 = 10 - (-1 + 1) = 10$

$C33 = 9 - (-1 + 0) = 10$

$C42 = 4 - (1 + 1) = 2$

$C44 = 6 - (1 + 1) = 4$

بما أن التكلفة المباشرة لجميع الخلايا الفارغة موجبة .

∴ يكون الحل أمثل وتكون أقل تكلفة (270) دينار

ثانياً: مشاكل التعيين (التخصيص) The Assignment Problems

يمكن القول ان مشاكل التعيين هي عبارة عن حالة خاصة من مشاكل النقل، وتتعلق بتعيين عدد معين من الأجهزة او العمال لإنجاز عدد من الوظائف وذلك عن طريق تعيين جهاز واحد أو عامل واحد لوظيفة واحدة. وهذا يتطلب تساوي عدد الأجهزة مع عدد الوظائف. والمشكلة هنا تتعلق بإختيار أفضل تعيين بحيث يؤدي ذلك إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح.

طرق حل مشاكل التعيين:

هناك عدة طرق متبعة لحل مشاكل التعيين منها:

1. طريقة العد الكامل Complete Enumeration
2. الطريقة الهنغارية Hungaretion Method
3. طريقة البرمجة الخطية (Linear Programming Method (simplex
4. طريقة النقل Transportation Method

1. طريقة العد الكامل Complete Enumeration

في هذه الطريقة تحدد جميع البدائل لتوزيع عدد معين من العمال على عدد معين من الوظائف، ثم نختار البديل المناسب الذي يؤدي إلى تخفيض التكاليف أو تعظيم الأرباح حيث تكون طريقة الحل في الحالتين نفسها ولكن في تخفيض التكاليف نأخذ أقل قيمة وفي تعظيم الأرباح نأخذ أعلى قيمة.

ويمكن إيجاد عدد البدائل باستخدام مبدأ طرق العد. فإذا كان لدينا عدد من العمال يساوي N فإن عدد البدائل يساوي !N ولتوضيح هذه الطريقة نأخذ المثال التالي:

مثال "1": (تخفيض التكاليف):

ليكن لدينا ثلاثة أجهزة (C, B, A) لإنجاز ثلاث وظائف (1، 2، 3). وكانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة بالدينار الأردني معطاة في الجدول التالي:

الأجهزة	الوظائف		
	1	2	3
A	16	8	14
B	10	4	8
C	8	2	10

المطلوب: استخدم طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تعيين لتقليل التكاليف.

الحل: عدد الأجهزة = 3، لذا فإن عدد البدائل = !3 = 6.

الجدول التالي يعطي البدائل الستة، والتكاليف الناتجة عن كل بديل:

البدائل	الأجهزة			إجمالي التكاليف
	A	B	C	
1	1	2	3	16 + 8 + 14 = 38
2	1	3	2	16 + 8 + 2 = 26
3	2	1	3	8 + 10 + 10 = 28
4	2	3	1	8 + 8 + 8 = 24
5	3	1	2	14 + 10 + 2 = 26
6	3	2	1	14 + 4 + 8 = 26

يلاحظ من الجدول أن أفضل البدائل هو البديل رقم 4 وهو تعيين:

الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة (2).

الجهاز (B) لإنجاز الوظيفة (3).

الجهاز (C) لإنجاز الوظيفة (1).

بحيث يعطي إجمالي التكاليف: 8 + 8 + 8 = 24 J. D.

مثال "2": (تعظيم الأرباح):

شركة ترغب في تعيين ثلاث عمال لإنجاز ثلاث وظائف فإذا كانت الأرباح الناجمة عن القيام بهذه الوظائف بالدينار الأردني مبينة في الجدول التالي:

العمال	الوظائف		
	1	2	3
A	6	15	4
B	9	7	6
C	7	1	11

المطلوب: استخدم طريقة العد الكامل لتحديد افضل تعيين يحقق أعظم ربح ممكن.

الحل: عدد البدائل = !3 = 6.

الجدول التالي يعطي البدائل الستة، والأرباح الناتجة عن كل بديل:

البدائل	العمال			الأرباح
	A	B	C	
1	1	2	3	6 + 15 + 3 = 24
2	1	3	2	6 + 6 + 1 = 13
3	2	1	3	15 + 9 + 11 = 35
4	2	3	1	15 + 6 + 7 = 28
5	3	1	2	4 + 9 + 1 = 14
6	3	2	1	4 + 7 + 7 = 18

الحل الأمثل والذي يحقق أعظم ربح ممكن هو عند إجراء التعيين التالي:

العامل (A) ينجز الوظيفة (2).

العامل (B) ينجز الوظيفة (1).

العامل (C) ينجز الوظيفة (3).

ويكون الربح الناتج عن هذا التعيين = 35 دينار.

هـــذه الطريقـــة قـــد تبـــدو بســـيطة خاصـــة إذا كـــان عـــدد الوظـــائف قليـــل لا يتجاوز 3 وظائف ولكن إذا كانت المشكلة تتعلق بأربعة وظائف مثلاً فإن عدد البدائل يساوي "24" بديلاً وفي حالة خمسة وظائف فإن عدد البدائل يساوي "120" بديلاً وهكذا وكلما زادت البدائل كلما أصبحت هذه الطريقة غير عملية.

لذلك يمكن استخدام طريقة أخرى بديلة تمكنا من تقييم البدائل دفعة واحدة وهي الطريقة الهنغارية.

2. الطريقة الهنغارية (المجرية) Hungarian Method

خطوات تطبيق هذه الطريقة لأقل التكاليف هي:

1. نطرح أقل قيمة في كل عمود من كل القيم في ذلك العمود.
2. ثم نطرح أقل قيمة في كل صف من كل القيم في ذلك الصف.
3. نغطي الأصفار (في الصفوف والأعمدة) بأقل عدد ممكن من المستقيمات الافقية والعمودية.
4. إذا كان عدد المستقيمات يساوي عدد صفوف الجدول فإننا نكون قد وصلنا إلى الحل ونقوم بعملية التعيين بأخذ القيمة الأصلية المناظرة للصفر في الجدول.
5. إذا كان عدد المستقيمات أقل من عدد صفوف الجدول، فإننا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من كل القيم غير المغطاة. ونضيف هذه القيمة إلى نقاط تقاطع المستقيمات.
6. يجري تكرار التغطية حتى يتم التوصل إلى عدد مستقيمات مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة.

ملاحظة1:

في حالة تعظيم الأرباح يتم أولاً طرح جميع القيم من أعلى قيمة في الجدول، ومن ثم نطبق الخطوات السابقة.

ملاحظة2:

يجوز طرح الصفوف أولاً ثم طرح الأعمدة .

مثال: (تخفيض التكاليف).

ترغب إدارة أحد المصانع في تعيين أربع عمال لإنجاز أربعة وظائف. فإذا كانت تكاليف إنجاز هذه الوظائف بالدينار الأردني معطاة في الجدول التالي:

العمال	الوظائف			
	1	2	3	4
A	5	6	2	4
B	9	5	1	9
C	1	2	**6**	1
D	7	6	**15**	12

المطلوب: استخدم طريقة الهنغارية لإيجاد افضل تعيين يحقق أقل تكلفة.

الحل:

1. نطرح أقل قيمة في كل عمود من كل القيم في ذلك العمود.
2. نطرح أقل قيمة في كل صف من كل القيم في ذلك الصف.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	4	4	1	3
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	6	4	14	11

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

طرح الأعمدة ← طرح الصفوف

3. نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر فأكثر بأقل عدد ممكن من المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	3	3	0	2
B	8	3	0	8
C	0	0	5	0
D	2	0	10	7

4. وحيث أن عدد المستقيمات "الأفقية والعمودية" أقل من عدد صفوف الجدول، لذا نختار أقل قيمة من القيم غير المغطاة ونطرحها من كل القيم غير المغطاة، ونضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	1	3	0	0
B	6	3	0	6
C	0	2	7	0
D	0	0	10	5

بهذه الخطوة نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ويتم إختيار الحل كالتالي:

إختيار الصفر الوحيد في أي صف أو عمود أولاً ويشطب أي صفر آخر في ذلك الصف أو العمود.

- في الصف الأول نختار الصفر (A4) ويشطب باقي الأصفار في العمود الرابع.
- في الصف الثاني نختار الصفر (B3) ويشطب باقي الأصفار في العمود الثالث.
- في الصف الثالث نختار الصفر (C1) ويشطب باقي الأصفار في العمود الأول.

وأخيراً في الصف الرابع نختار الصفر (D2).

وعلى هذا الأساس يتم:

1. تعيين العامل (A) لإنجاز الوظيفة (4).
2. تعيين العامل (B) لإنجاز الوظيفة (3).
3. تعيين العامل (C) لإنجاز الوظيفة (1).
4. تعيين العامل (D) لإنجاز الوظيفة (2).

وبالتالي فإن أقل التكاليف من الجدول الأصلي والناجمة عن هذا التعيين هو:

$4 + 1 + 1 + 6 = 12$ J. D

مثال: (تعظيم الأرباح).

مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	6	15	4	5
B	9	7	6	1
C	5	11	1	7
D	14	18	9	10

المطلوب: إيجاد الحل المثالي، ومجموع الأرباح لهذه الحل.

الحل:

1. لأن المسألة تعظيم أرباح، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو "18".

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	12	3	14	13
B	9	11	12	17
C	13	7	17	11
D	4	0	9	8

2. طرح أقل رقم في كل صف لا يوجد به صفر من كل الأرقام في الصف.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	9	0	11	10
B	0	2	3	8
C	6	0	10	4
D	4	0	9	8

3. طرح أقل رقم في كل عمود لا يوجد به صفر من كل الأرقام في العمود.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

4. نغطي كل صف وكل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات.

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	9	0	8	6
B	0	2	0	4
C	6	0	7	0
D	4	0	6	4

5. وحيث أن عدد المستقيمات "الأفقية والعمودية" أقل من عدد صفوف الجدول، لذا نختار أقل رقم من الأرقام غير المغطاة وهو "4" ونطرحه من جميع الأرقام غير المغطاة ونضيفه إلى نقاط تقاطع المستقيمات، لينتج الجدول التالي:

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	5	0	4	2
B	0	6	0	4
C	6	4	7	0
D	0	0	2	0

الحل المثالي هو:

1. تعيين العامل (A) لإنجاز الوظيفة (2).
2. تعيين العامل (B) لإنجاز الوظيفة (3).

3. تعيين العامل (C) لإنجاز الوظيفة (4).

4. تعيين العامل (D) لإنجاز الوظيفة (1).

مجموع الأرباح للحل المثالي "من الجدول الأصلي":

15 + 6 + 7 + 14 = 42 J. D

مثال:

إذا كان في مصنع أربع آلات لإنتاج أربع أنواع من السلع بحيث أن كل آلة من الآلات تعطي قدرة إنتاجية لكل نوع من السلع كما في الجدول الآتي:

السلع

الآلات

	1	2	3	4
A	5	9	7	8
B	3	2	3	5
C	7	9	10	10
D	6	5	6	4

فما هي أعلى قدرة إنتاجية إذا كانت كل آلة تنتج واحد من هذه السلع؟

الحل:

نرى أن المراد هنا إيجاد أعلى عائد ولذلك نأخذ أعلى قيمة (10) ونطرح منها كل القيم الأخرى في الجدول ليتكون لدينا الجدول التالي:

السلع

الآلات

	1	2	3	4
A	5	1	3	2
B	7	8	7	5
C	3	1	0	0
D	4	5	4	6

الآن نتعامل مع هذا الجدول على أنه أقل تكلفة، فنطرح أقل قيمة من كل صف ليصبح:

	1	2	3	4
A	4	0	2	1
B	2	3	2	0
C	3	1	0	0
D	0	1	0	2

ليس هناك داعي لأن نطرح أقل قيمة من كل عمود وذلك لأن كل الأعمدة تحتوي أصفار فنغطي كل صف أو عمود يحتوي أصفار بأقل قدر ممكن من الخطوط فيكون عدد المستقيمات يساوي عدد الصفوف ويكون أعلى إنتاج إذا كان:

A2, B4, C3, D1

وتكون أكبر قدرة إنتاجية هي: 30 = 6 + 10 + 5 + 9

ملاحظة:

في الطريقة الرابعة نتعامل مع النموذج على أن المشكلة نقل وبالتالي تعتبر قيم العرض كلها تساوي واحد وقيم الطلب كلها تساوي واحد فعلى سبيل المثال إذا كان لدينا نموذج مكون من ثلاث صفوف وثلاثة أعمدة فإنه يصبح كالآتي:

	1	2	3	العرض
A	A1	A2	A3	1
B	B1	B2	B3	1
C	C1	C2	C3	1
الطلب	1	1	1	

ويمكن كتابته على صورة نموذج برمجة خطية كالآتي :

دالة الهدف:

$$Max\ (Min)\ Z = A1 + A2 + A3 + B1 + B2 + B3 + C1 + C2 + C3$$

Subject to,

$$A1 + A2 + A3 = 1$$

$$B1 + B2 + B3 = 1$$

$$C1 + C2 + C3 = 1$$

$$A1 + B1 + C1 = 1$$

$$A2 + B2 + C2 = 1$$

$$A3 + B3 + C3 = 1$$

وكما نلاحظ من القيود ودالة الهدف فإن هذا النموذج صعب الحل ولذاك تعتبر هذه الطريقة طريقة غير عملية ولا تستخدم في الحياة العملية. أما بالنسبة لطريقة النقل فإننا نتعامل مع الجدول السابق على أنه مشكلة نقل ونجد الحل الإبتدائي بإحدى الطرق الثلاث المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل.

مثال:

في جدول التعيين التالي:

	1	2	3	4
A	2	3	7	8
B	1	5	6	2
C	4	2	9	7
D	3	8	1	10

استخدم طريقة النقل في إيجاد أقل التكاليف.

الحل:

نجد الحل الاولي باستخدام طريقة فوجل:

	1	2	3	4	العرض	الفرق
A	2 1	3	7	8	1	~~1~~ 0
B	1	5	6	2 1	~~1~~ 0	1
C	4	2 1	9	7	~~1~~ 0	2
D	3	8	1 1	10	1/0	2
الطلب	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0	~~1~~ 0		
الفرق	1 ~~2~~	1	5	5		

ويكون أفضل تعيين هو: A1, B4, C2, D3

وتكلفته هي: $2 + 2 + 2 + 1 = 7$

وهذا المثال سيكون المثال الثالث في الحل باستخدام الحاسوب بطريقة Solver على برنامج Excel .

نموذج التعيين غير المتوازن:

في بعض الأحيان يكون عدد الوظائف أقل من عدد الموظفين أو عدد المكائن أكبر من عدد العمال وبالتالي يكون نموذج التعيين غير متوازن وفي هذه الحالة يجب موازنة النموذج قبل إيجاد الحل الأمثل له وذلك بإضافة صف أو عمود حسب الأقل وإعطائه تكاليف أو أرباح تساوي صفراً.

مثال:

إذا كان لدى مصنع أربع آلات وثلاثة عمال فنيين للعمل على هذه الآلات الأربعة والجدول التالي يعطى إنتاج كل عامل على كل آلة من هذه الآلات.

الآلات

العمال

	1	2	3	4
A	10	15	12	20
B	17	13	18	10
C	7	9	11	9

ما هي الآلة التي يجب أن تتعطل ليعطى النموذج أعلى إنتاج ممكن وما هو هذا الإنتاج.

الحل: يجب موازنة النموذج أولاً وذلك بإضافة عامل رابع (D) وهمي:

	1	**2**	**3**	**4**
A	10	15	12	20
B	17	13	18	10
C	7	9	11	9
D	0	0	0	0

ثم نجد الحل الأمثل بطريقة العد الكامل فيكون عدد البدائل = !4 = 24 بديلاً وهي:

A1, B2, C3, D4 = 10 + 13 + 11 + 0 = 34

A1, B2, C4, D3 = 10 + 13 + 9 + 0 = 32

A1, B3, C2, D4 = 10 + 18 + 9 + 0 = 37

A1, B3, C4, D2 = 10 + 18 + 9 + 0 = 37

A1, B4, C2, D3 = 10 + 10 + 9 + 0 = 29

A1, B4, C3, D2 = 10 + 10 + 11 + 0 = 31

A2, B1, C3, D4 = 15 + 17 + 11 + 0 = 43

A2, B1, C4, D3 = 15 + 17 + 9 + 11 = 41

A2, B3, C1, D4 = 15 + 18 + 7 + 0 = 40

A2, B3, C4, D1 = 15 + 18 + 9 + 0 = 42

A2, B4, C1, D3 = 15 + 10 + 7 + 0 = 32

A2, B4, C3, D1 = 15 + 10 + 11 + 0 = 36

A3, B1, C2, D4 = 12 + 17 + 9 + 0 = 38

A3, B1, C4, D2 = 12 + 17 + 9 + 0 = 38

A3, B2, C1, D4 = 12 + 13 + 7 + 0 = 32

A3, B2, C4, D1 = 12 + 13 + 9 + 0 = 34

A3, B4, C1, D2 = 12 + 10 + 7 + 0 = 29

A3, B4, C2, D1 = 12 + 10 + 9 + 0 = 31

A4, B1, C2, D3 = 20 + 17 + 9 + 0 = 46

A4, B1, C3, D2 = 20 + 17 + 11 + 0 = 48

A4, B2, C1, D3 = 20 + 13 + 7 + 0 = 40

A4, B2, C3, D1 = 20 + 13 + 11 + 0 = 44

A4, B3, C1, D2 = 20 + 18 + 7 + 0 = 45

A4, B3, C2, D1 = 20 + 18 + 9 + 0 = 47

∴ أفضل تعيين هو A4, B1, C3, D2

أي أن يكون العامل A على الآلة الرابعة.

والعامل B على الآلة الأولى.

والعامل C على الآلة الثالثة.

والعامل الوهمي D على الآلة الثانية.

وبالتالي ستكون الآلة المعطلة هي الآلة الثانية.

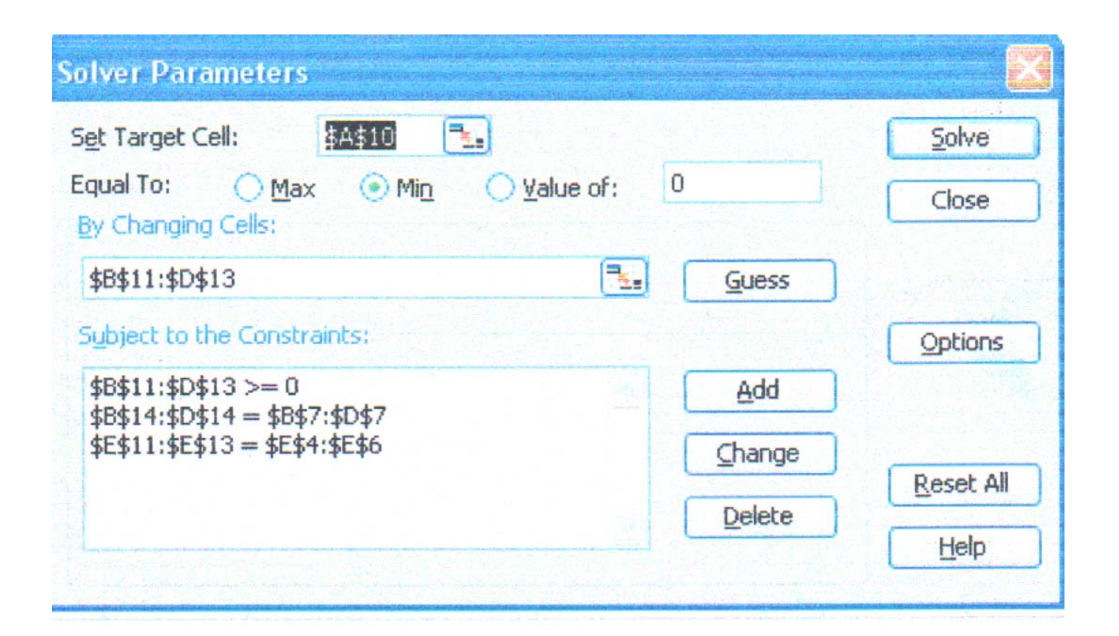
أما أفضل تعيين فيعطي عائداً مقداره 48 دينار.

تطبيقات النقل والتعيين باستخدام الحاسوب

أولاً: باستخدام Solver من Excel

في هذه البرمجية ندخل أولاً البيانات في الجدول الأول كما هو موضح في الأمثلة اللاحقة.

ثم نضع جدول الحل الأمثل في الجدول الثاني كما هو موضح في داخل المربع النهائي يكون التوزيع الأمثل وفي مربع Total Cost تكون قيمة الحل النهائي وتكون بالأمر كما في الشكل التالي وهو يمثل المثال الأول



حيث تمثل الخلية (A10) في Set target cell الحل النهائي Total cost والخلايا من (B11:D13) تمثل مربع الحل في الجدول الثاني أن الخلايا (B14:D14) تمثل العرض في جدول الحل النهائي والقيم (B7: D7) تمثل العرض في جدول البيانات والخلايا (E11:E13) تمثل عمود العرض في جدول الحل النهائي.

(E6: E4) تمثل عمود العرض في جدول البيانات

المثال الأول في الحل الأمثل

INPUTDATA

UNIT COST MATRIX	D1	D2	D3	SUPPLY
S1	5	1	8	12
S2	2	4	0	14
S3	3	6	7	4
DEMANED	9	10	11	

OPTIMUM SOLUTION

TOTAL COST 38	D1	D2	D3	ROW SUNM
S1	2	10	0	12
S2	3	0	11	14
S3	4	0	0	4
COL SUM	9	10	11	

المثال الثاني في الحل الامثل

INPUTDATA

UNIT COST MATRIX	D1	D2	D3	D4	D5	SUPPLY
S1	5	2	4	3	11	1200
S2	0	6	1	0	2	1400
S3	9	5	0	10	2	700
S4	8	5	6	0	3	800
S5	12	6	5	7	1	900
DEMANED	1500	600	1100	1400	400	

OPTIMUM SOLUTION

TOTAL COST 6300	D1	D2	D3	D4	D5	ROW SUNM
S1	100	600	0	500	0	1200
S2	1400	0	0	0	0	1400
S3	0	0	700	0	0	700
S4	0	0	0	800	0	800
S5	0	0	400	100	400	900
COL SUM	1500	600	1100	1400	400	

المثال الثالث في التعيين

INPUTDATA

UNIT COST MATRIX	D1	D2	D3	D4	SUPPLY
S1	2	3	7	8	1
S2	1	5	6	2	1
S3	4	2	9	7	1
S4	3	8	1	10	1
DEMANED	1	1	1	1	

OPTIMUM SOLUTION

TOTAL COST					
7	D1	D2	D3	D4	ROW SUNM
S1	1	0	0	0	1
S2	0	0	-0	1	1
S3	-0	1	0	0	1
S4	0	0	1	0	1
COL SUM	1	1	1	1	

أما الحل عن طريق برنامج TORA فيكون كالآتي:

نفس الأمثلة التي حلت عن طريق Excel بالترتيب المثال الأول والثالث .

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

سبتمبر ٠٢، ٢٠٠٨ ١٨:٤٤

TRANSPORTATION MODEL-- ORIGINAL DATA

Title: EXAMPEL1

	Name	D1	D2	D3	**Supply**
S1		5.00	1.00	8.00	**12.00**
S2		2.00	4.00	0.00	**14.00**
S3		3.00	6.00	7.00	**4.00**
Demand		**9.00**	**10.00**	**11.00**	

Iteration 3: **ObjVal** **38.00**

	Name		D1 v1=5.00	D2 v2=1.00	D3 v3=3.00	Supply
S1		u1=0.00	5.00 **2** 0.00	1.00 **10** 0.00	8.00 -5.00	**12**
S2		u2=-3.00	2.00 **3** 0.00	4.00 -6.00	0.00 **11** 0.00	**14**
S3		u3=-2.00	3.00 **4** 0.00	6.00 -7.00	7.00 -6.00	**4**
	Demand		**9**	**10**	**11**	

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

الاثنين، ٠٢ سبتمبر ٢٠٠٨ ١٨:٤٧

TRANSPORTATION MODEL-- ORIGINAL DATA

Title: EXAMPEL3

Name	D1	D2	D3	D4	**Supply**
S1	2.00	3.00	7.00	8.00	**1.00**
S2	1.00	5.00	6.00	2.00	**1.00**
S3	4.00	2.00	9.00	7.00	**1.00**
S4	3.00	8.00	1.00	10.00	**1.00**
Demand	**1.00**	**1.00**	**1.00**	**1.00**	

TRANSPORTATION MODEL -- TABLEAUS (Vogel's Method)

Title: EXAMPEL3

Iteration 1: **ObjVal** **7.00**

	Name		D1 v1=2.00	D2 v2=3.00	D3 v3=7.00	D4 v4=8.00
S1		u1=0.00	2.00 **1** 0.00	3.00 **0** 0.00	7.00 **0** 0.00	8.00 **0** 0.00
S2		u2=-6.00	1.00 -5.00	5.00 -8.00	6.00 -5.00	2.00 **1** 0.00
S3		u3=-1.00	4.00 -3.00	2.00 **1** 0.00	9.00 -3.00	7.00 0.00
S4		u4=-6.00	3.00 -7.00	8.00 -11.00	1.00 **1** 0.00	10.00 -8.00
	Demand		**1**	**1**	**1**	**1**

	Supply
S1	**1**
S2	**1**
S3	**1**
S4	**1**

تمارين

س1 : شركة تمتلك ثلاثة مصانع A , B , C بحيث تكون الطاقة الانتاجية لكل مصنع هي كالآتي:

المصنع	الطاقة الانتاجية بالطن
A	2200
B	1750
C	2050

وردت للشركة طلبية من إنتاج هذه المصانع من أربعة مراكز تسويقية كالآتي:

المركز التسويقي	الكمية المطلوبة بالطن
X	550
Y	2250
Z	1600
U	1600

وكانت تكلفة نقل الطن الواحد من المصنع إلى المركز التسويقي هي كما في الجدول

المركز / المصنع	X	Y	Z	U
A	4	2	6	1
B	9	5	10	2
C	6	8	10	12
	5	3	1	4

المطلوب:

1- كون نموذج النقل لهذه الشركة.

2- أوجد الحل الأولي للنموذج بالطرق الثلاثة المعروفة .

3- اختار طريقة الحل الأولى بطريقة الزاوية الشمالية الغربية واختبر الحل الأمثل بطريقة حجز التنقل.

4- اختار طريقة الحل الأولي أقل التكاليف واختبر الحل الامثل بطريقة (Modi)

س2: إحدى الشركات ترغب بنقل عدد من السلع إلى عدد من المراكز التسويقية، فإذا كانت الشركة تمتلك عدد من المصانع في مناطق مختلفة وأن تكاليف النقل للسلع والكميات المطلوبة من قبل المراكز والكميات المتاحة لدى المصانع معطاة في جدول النقل التالي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	D4	العرض
F1	6	7	8	9	700
F2	5	2	4	4	600
F3	7	2	6	7	300
F4	3	6	7	8	150
الطلب	100	250	400	1000	1750

أوجد الحل الأولي باستخدام:

أ. طريقة الزاوية الشمالية الغربية.

ب. طريقة أقل التكاليف.

ج. طريقة فوجل التقريبية.

س3: ليكن لديك جدول النقل التالي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
F1	1	3	2	5
F2	3	2	6	8
F3	3	5	4	7
الطلب	5	5	10	

أ. أوجد الحل الأولي باستخدام طريقة أقل التكاليف.

ب. أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة المسار المتعرج.

ج. أوجد الحل الأمثل باستخدام طريقة التوزيع المعدلة.

س4: في إحدى البلدان يوجد ثلاث مراكز لإستخراج إحدى المواد الخام تبلغ الطاقة الإنتاجية السنوية لمركز الإستخراج الأول 130 ألف طن وللثاني 50 ألف طن وللثالث 150 ألف طن. تنقل هذه المادة الخام إلى أربعة مؤسسات صناعية حيث يجري تصنيعها. وتستهلك المؤسسة الأولى 40 ألف طن سنوياً والثانية 90 ألف طن اما المؤسسة الثالثة فتستهلك 80 ألف طن سنوياً بينما الرابعة 120 ألف طن سنوياً.

الجدول التالي يبين نفقات نقل الطن الواحد من هذه المادة من أي من مراكز الإنتاج الثلاثة إلى أي مؤسسة صناعية.

المؤسسات الصناعية

مراكز الإستخراج

	D1	D2	D3	D4	العرض
A	20	17	15	10	130
B	16	14	18	13	50
C	12	15	11	19	150
الطلب	40	90	80	120	

إبحث عن الخطة المثلى التي تؤمن المادة الخام وتحقق أقل قدر ممكن من تكاليف النقل لهذه المادة (استخدم طريقة فوجل في الحل الأولي وطريقة التوزيع المعدلة للحل الأمثل).

س5: تنتج إحدى الشركات منتجاً واحداً متماثلاً في ثلاثة مصانع هي F3, F2, F1 وتمتلك الشركة ثلاثة مراكز للتوزيع هي S1 ,S2 ,S3 وتبلغ طاقات المصانع الثلاثة في الشهور الستة القادمة 800 ,600 ,1000 وحدة على التوالي كما تبلغ إحتياجات مراكز التوزيع الثلاثة عن نفس الفترة التخطيطية 500 ,700 ,1200 على التوالي. وتقدر تكلفة نقل الوحدة من المصانع المختلفة إلى مراكز التوزيع المختلفة كالآتي:

مراكز الطلب

المصادر

	D1	D2	D3	العرض
F1	80	60	90	800
F2	100	120	70	600
F3	40	50	30	1000
F4	40	50	30	1000
الطلب	500	700	1200	

ما هي الخطة المثلى لنقل المنتجات من المصانع إلى مراكز التوزيع.

استخدم Solver من Excel لحل هذا المثال .

س6: إذا كان لإحدى مصانع المشروبات الغازية ستة مستودعات وسبعة مراكز توزيع فإذا كان كمية الصناديق المخزنة في المستودعات وحاجات مراكز التوزيع وتكلفة نقل الصندوق الواحد من المستودع إلى المركز معطاة في الجدول التالي:

المستودعات

مراكز التوزيع

	S1	S2	S3	S4	S5	S6	الطلب
D1	6	1	1	7	0	4	7500
D2	3	9	6	0	8	6	6000
D3	10	7	5	3	6	9	8000
D4	3	11	5	7	0	3	5500
D5	7	6	12	0	2	15	9000
D6	4	2	9	13	3	4	7000
D7	3	5	9	4	14	1	12000
العرض	10000	8000	6500	9000	4500	20000	55000 / 58000

ما هي الخطة المثلى لنقل هذه الصناديق من المستودعات إلى مراكز التوزيع بأقل تكلفة ممكنة. استخدم برنامج Solver من Excel لحل هذا النموذج .

س7: تنتج شركة إلكترونيات أربعة أنواع من الأجهزة هي تلفزيون، فيديو، مسجل، راديو، ويقدر الطلب على هذه الأجهزة بحوالي 6000، 8000، 9500، 4500، على التوالي، فإذا كان كل جهاز من هذه الأجهزة يمر بأربعة مرحل والطاقة الإنتاجية لكل مرحلة من هذه المراحل هذه هي 7500، 9500، 5000، 8000، وتكاليف تصنيع الوحدة الواحدة من كل جهاز في كل مرحلة معطاة في الجدول التالي:

المراحل / الأجهزة	A	B	C	D
تلفزيون	50	20	40	90
فيديو	5	60	100	30
مسجل	25	110	70	10
راديو	120	35	15	80

إستخدم نموذج النقل لإيجاد أقل تكلفة إنتاج لهذه الأجهزة لتغطية إحتياجات السوق.

س8 : عينت شركة خمسة مهندسين في خمسة مواقع وكان على الشركة نقلهم من مكان سكنهم إلى الموقع في سيارات الشركة باسرع وقت فإذا كانت المسافات بين سكن المهندسين والمواقع بالكيلومتر معطاة في الجدول.

الموقع / المهندس	1	2	3	4	5
A	2	7	9	3	10
B	5	2	1	3	7
C	10	12	15	11	8
D	9	10	8	12	1
E	7	2	5	13	12

ساعد الشركة توزيع المهندسين على المواقع بحيث تكون تكاليف النقل أقل ما يمكن بالطريقة الهنجارية .

س9 : أوجد الحل الأمثل لمشكلة التعيين التالية :

الموقع / المهندس	1	2	3	4
A	3	9	2	3
B	6	1	5	6
C	9	4	7	10
D	2	5	4	2

1- بطريقة العد الكامل :

أ- لتخفيض التكاليف

ب- لتعظيم الأرباح

2- بطريقة Solver من Excel لتخفيض التكاليف .

س10 : أوجد الحل الأمثل لمشكلة التعيين التالية بالطريقة الهنجارية

الموقع / المهندس	1	2	3	4	5
A	2	4	3	7	1
B	8	3	2	4	6
C	10	5	7	9	8
D	7	6	5	8	9
E	2	5	4	3	2

أ- لتخفيض التكاليف

ب- لتعظيم الأرباح

س11 : اذا كان جدول التعيين التالي غير متوازن

الموقع / المهندس	1	2	3	4	5
A	7	9	5	12	6
B	18	9	10	11	13
C	2	4	6	3	5
D	9	7	5	3	1

المطلوب:

1- وازن النموذج.

2- حل النموذج الناتج بالطريقة الهنجارية لتعظيم الربح.

3- حل النموذج باستخدام Solver

س12 : طلبت شركة تعيين (4) فنيين للعمل على أربعة آلات وكانت تكاليف هذا التعيين كما في الجدول التالي:

الفنيون	الآلات			
	1	**2**	**3**	**4**
A	2	5	3	-
B	4	2	3	7
C	2	-	5	6
D	3	5	4	1

فأوجد أفضل تعيين: أ. بالطريقة الهنجارية. ب. بطريقة العد الكامل.

س13: إذا كان رئيس قسم الحاسوب في إحدى الجامعات الأردنية لديه ست محاضرين يدرسون ست مواد مختلفة فإذا كانت قدرة الأستاذ النسبية لتدريس كل مادة من هذه المواد معطاة في الجدول التالي:

الفنيون	الآلات					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
A	70	80	70	90	75	60
B	60	75	90	80	70	90
C	80	50	85	65	70	70
D	80	50	85	65	70	75
E	80	85	65	70	90	80
F	70	60	50	90	80	70

فما هو أفضل توزيع لهؤلاء المحاضرين على هذه المواد بحيث تعطى أعلى نسبة نجاح للطلاب باستخدام الطريقة الهنجارية.

س14: أعد حل السؤال الثالث عشر باستخدام طريقة النقل بحيث يكون الحل بطريقة أقل تكلفة.

س15: أعد حل السؤال الثاني عشر باستخدام طريقة البرمجة الخطية وتأكد من حلك باستخدام Excel.

س16: إذا كان لدى مصنع أربع خطوط إنتاج يعمل عليها أربعة عمال فنيين مهرة فإذا كان إنتاج كل عامل على كل خط إنتاج معطاة في الجدول.

خطوط الإنتاج

العمال

	1	2	3	4
A	4	9	6	8
B	5	3	4	2
C	8	1	7	10
D	2	6	12	11

استخدم طريقة النقل في إيجاد أعلى إنتاج "طريقة فوجل".

ثم تأكد من حلك بطريقة Solver من Excel .

س18: أعلنت شركة عن أربعة وظائف شاغرة فتقدم إلى هذه الوظائف خمسة أشخاص بنفس الكفائة مؤهلين لشغل هذه الوظائف وكانت تكلفة شغل كل شخص في كل من هذه الوظائف معطاة في الجدول التالي:

الوظائف

العمال

	1	2	3	4
A	7	9	5	11
B	4	5	8	6
C	3	4	1	5
D	6	8	10	11
E	9	7	9	8

ساعد هذه الشركة في إختيار أفضل أربعة أشخاص في شغل هذه الوظائف مستخدماً الطريقة الهنجارية؟.

الوحدة الخامسة

شبكات الأعمال

Net Works

الوحدة الخامسة

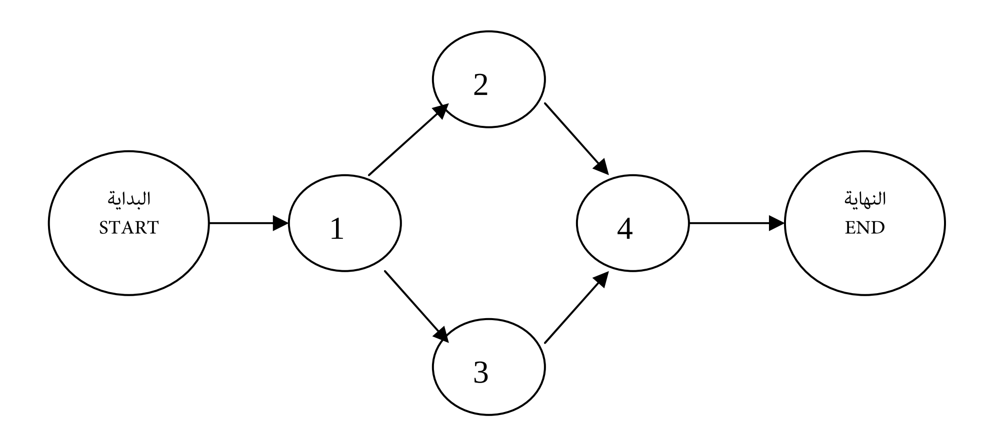
شبكات الأعمال

Net Works

مقدمة :

تعتبر شبكات الأعمال من الأساليب الحديثة والمتقدمة في استخدام التكنولوجيا وخصوصا تكنولوجيا الحاسوب في الادارة وخاصة ادارة المشاريع الصغرى والكبرى منها حيث بدأت في عام (1956) في إحدى الشركات الامريكية حيث قام مهندس من الشركة ومبرمج حاسوب بتطوير نظام حاسوب مختص بالتخطيط والمداولة لصيانة المصنع ومشاريع البناء فيه ويمكن تعريف شبكة الأعمال بانها مجموعة من النقاط (Nodes) أو الاحداث (Events) والخطوط (Arcts) أو الانشطة (Activities)

والشكل التالي يوضح نموذج لشبكة الأعمال



نلاحظ من خلال هذه الشبكة أنها تحتوي على بداية ونهاية وايضاً تحوي على احداث متعاقبة (متتالية) واخرى متزامنة (متوازية) واذا كانت الشبكة على شكل احداث متعاقبة فقط فإنها تسمى سلسلة (Chain)

لنأخذ المثال التالي لنتعرف على كيفية رسم شبكة الأعمال

مثال:

ارسم شبكة مشروع إنشاء بيت صغير مكون من طابقة واحد حيث فعالياته هي:

1- شراء الأرض
2- عمل المخطط
3- شق الاساسات
4- بناء الأعمدة
5- بناء الجدران الخارجية
6- بناء السقف
7- عمل التقسيمات الداخلية
8- عمل توصيلات الكهرباء
9- تركيب تمديدات المياه والمجاري
10- قصارة السقف والجدران
11- تركيب بلاط الأرض
12- تركيب الأبواب والشبابيك
13- الطلاء الخارجي
14- الطلاء الداخلي
15- طلاء الابواب والشبابيك
16- التشطبيات النهائية

الحل :

عند تكوين شبكة الأعمال يجب مراعاة ما يلي:

1- معرفة بداية الشبكة الحدث الأول وهو في مثالنا "شراء الأرض" .

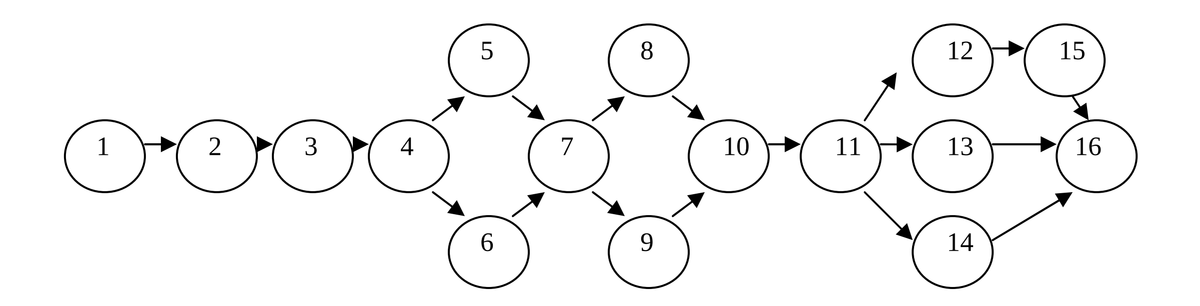
2- معرفة النشاطات والاحداث اللاحقة لكل حدث.

3- معرفة الاحداث المتوالية والاحداث المتوازية

4- وضع الاحداث في جدول يبين الحدث والحدث السابق.

الحدث السابق	الخبرة
-	1
1	2
2	3
3	4
4	5
4	6
5 ، 6	7
7	8
7	9
8 ، 9	10
10	11
11	12
11	13
11	14
12	15
13 ، 14 ، 15	16

5- وضع الاحداث ضمن دوائر والوصل بينها بخطوط وأسهم حسب تتابعها



فائدة عمل شبكة الأعمال هو حساب الزمن المتوقع لانجاز المشروع أو إنجاز أي جزء من الأجـزاء وذلـك مـن أجـل السيطرة على المشروع ولعمل ذلك هناك طريقتان هما:

أ- طريقة المسار الحرج Critical Path method (CPM)

ب- تقييم ومراجعة المشاريع (شبكة بيرت)

Program Evaluation and Review Technique (PERT)

وسنتعرف على هاتان الطريقتان بالتفصيل :

أ- طريقة المسار الحرج Critical Path method (CPM)

يعرف المسار الحرج بأنه اطول مسارات الشبكة زمناً والمسـار هـو النشـاطات المتعاقبـة مـن بدايـة الشـبكة حتـى نهايتها.

وهناك طريقتان لحساب المسار الحرج :

1- عن طريق حساب لجميع المسارات وازمنتها في الشبكة من بدايتها حتى نهايتها وتحديد المسـار الحـرج بحيـث يكون اطول هذه المسارات زمناً.

2- عن طريق حساب الازمنة المبكرة والمتأخرة .

وسنشرح الطريقتان بالتفصيل :

1- طريقة حساب جميع المسارات : سنشرحها عن طريقة المثال التالي:

مثال :

مشروع ما يتكون من تسعة أحداث، والجدول التالي يمثل الاحداث والاحداث السابقة والزمن بالاسبوع لهذا المشروع :

الحدث	الحدث السابق	الزمن بالاسبوع
A	-	2
B	A	10
C	A , B	2
D	A	5
E	B	3
F	E , C	1
G	D , C	5
H	G , D	6
I	F , H	5

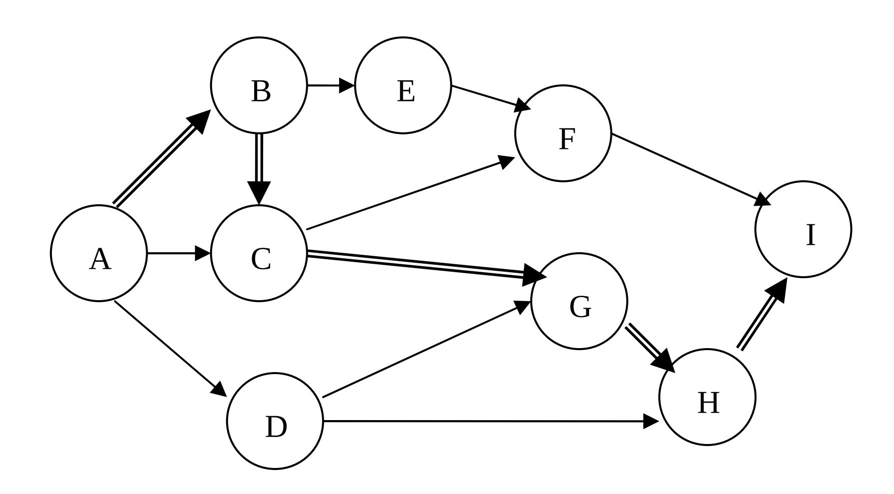
المطلوب :

أ- رسم شبكة الأعمال .

ب- جد مسارات الشبكة، ثم حدد المسار الحرج من ضمنها وما هو زمن الانجاز للمشروع.

الحل:

أ- نرسم شبكة الأعمال حسب القواعد السابقة :



ب- نحسب كل المسارات الممكنة للشبكة وهي :

المسار الأول $A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow I$

وزمنه $2 + 10 + 3 + 1 + 5 = 21$

المسار الثاني $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I$

وزمنه $2 + 10 + 2 + 1 + 5 = 20$

المسار الثالث $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$

زمنه $2 + 10 + 2 + 5 + 6 + 5 = 30$

المسار الرابع $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow I$

زمنه $2 + 2 + 1 + 5 = 10$

المسار الخامس $A \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$

زمنه $2 + 2 + 5 + 6 + 5 = 20$

المسار السادس $A \rightarrow D \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$

$2 + 5 + 5 + 6 + 5 = 23$

زمنه

المسار السابع $A \rightarrow D \rightarrow H \rightarrow I$

زمنه $2 + 5 + 6 + 5 = 18$

ويكون المسار الحرج للمشروع هو المسار الأطول زمناً بين هذه المسارات وهو المسار الثالث

$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow I$

ونحدده على الشبكة بوضع خطين على طول المسار ويكون زمن الانجاز للمشروع هو (30) إسبوعاً .

ب- طريقة حساب الازمنة: وتقسم إلى قسمين:

1- الازمنة المبكرة (Earliest Time)

وتسمى أيضاً الحسابات الامامية Forward Pass

2- الازمنة المتأخرة (Latest Time)

وتسمى ايضاً الحسابات الخلفية Backward Pass

1- الازمنة المبكرة : وتتكون من نوعين من الازمنة

- زمن البدء المبكر Early Start (ES)
- زمن الانجاز المبكر Early Finish (EF)

ويكون حساب هذه الازمنة المبكرة كالآتي:

- زمن البدء المبكر للحدث الأول = صفر
- زمن الانجاز المبكر للحدث = زمن البدء المبكر + زمن الحدث (T) وبالرموز

$EF = ES + T$

- لباقي الاحداث زمن البدء المبكر = زمن الانجاز المبكر للحدث السابق

- اذا كان هناك تفرع نأخذ الزمن الأكبر

- يكون زمن الانجاز للمشروع هو زمن الانجاز المبكر لآخر حدث واذا كان هناك نهايتان تكون النهاية الاكبر.

وسنوضح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:

مثال:

الجدول التالي يمثل الاحداث والاحداث السابقة والزمن باليوم لمشروع ما

الزمن باليوم Time	الحدث السابق	الحدث Event
10	-	A
15	A	B
12	A	C
10	B , C	D
11	D	E
13	E	F
12	E	G
20	F , G	H

المطلوب:

إحسب الازمنة المبكرة لاحداث المشروع وما هو زمن انجاز المشروع .

الحل:

لحساب الازمنة المبكرة على الجدول نطبق القواعد السابقة ونكون الجدول كالتالي:

الحدث	الحدث السابق	Time t	زمن البدء المبكر ES	زمن الانتهاء المبكر EF
A	-	10	0	10
B	A	15	10	25
C	A	12	10	22
D	B , C	10	25	35
E	D	11	35	46
F	E	13	46	59
G	E	12	46	58
H	F , G	20	59	79

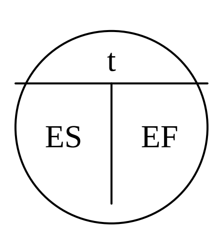
ويكون زمن الانجاز الكلي للمشروع "79" يوم .

ويمكن حساب الازمنة المبكرة عن طريقة الشبكة فنرسم الشبكة في البداية ثم نضع عند كـل حـدث الشـكل التـالي حيث

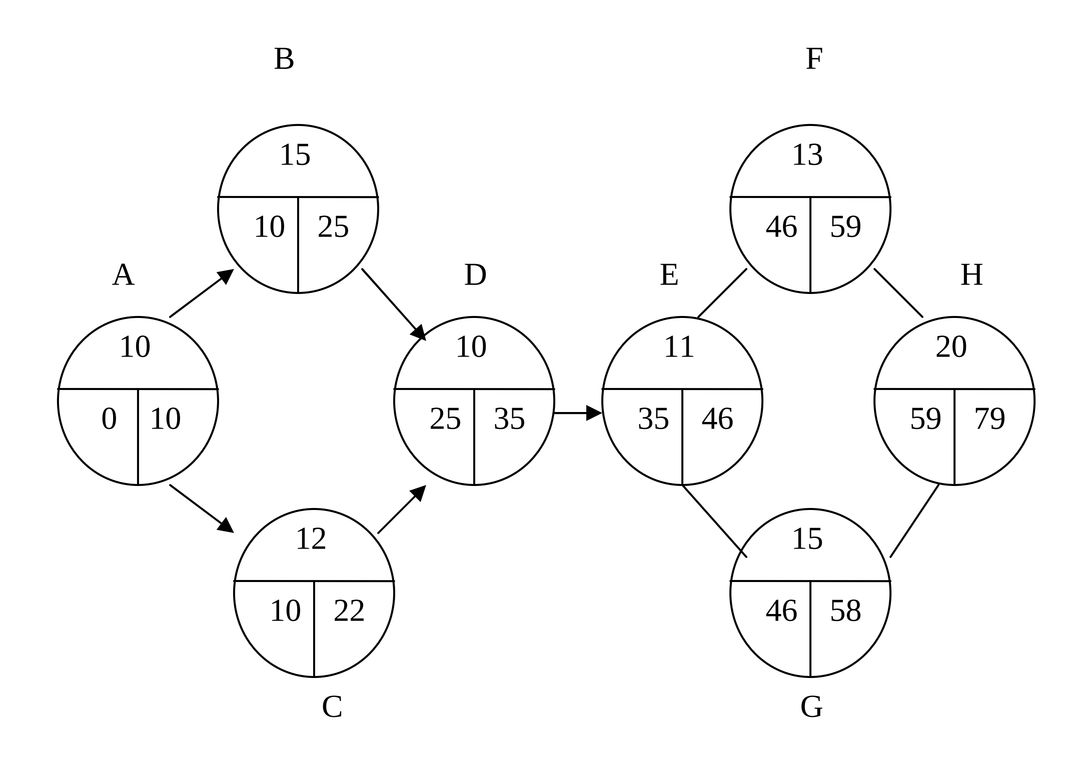
الزمن = t

زمن البدء المبكر = ES

زمن الانتهاء المبكر = EF



ويكون الحل كالآتي :



وهذه القيم هي نفس القيم التي ظهرت في الجدول

2- الأزمنة المتأخرة : ويوجد ايضاً نوعين من الازمنة المتأخرة

- زمن البدء المتأخر (Latest Start (LS

- زمن الانجاز المتأخر (Latest Finish (LF

ويكون حساب هذه الازمنة كالآتي :

- زمن الانجاز المتأخر لآخر حدث = زمن الانجاز المبكر

- زمن البدء المتأخر = زمن الانجاز المتأخر – زمن الحدث

$LS = LF - T$

- زمن الانجاز المتأخر = زمن البدء المتأخر للحدث اللاحق

- اذا كان هناك تفرع نأخذ القيمة الاقل

- اذا كان هناك نهايتين للشبكة نأخذ النهاية الأكبر فيهما ونعتبرها زمن انجاز متأخر للنهايتين.

- حتى نحسب الازمنة المتأخر يجب ان نحسب الازمنة المبكرة في البداية.

الزمن الفائض (S) Slack time

الزمن الفائض = زمن الانجاز المتأخر – زمن الانجاز المبكر

وايضا = زمن البدء المتأخر – زمن البدء المبكر

وبالرموز $S = LF - EF$

أو $S = LS - ES$

- يتكون المسار الحرج من الاحداث أو الانشطة التي يكون زمنها الفائض = صفر

مثال :

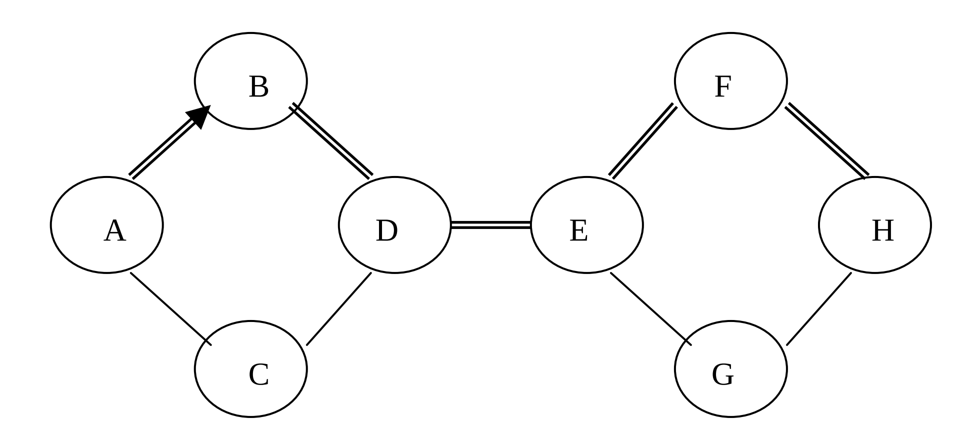
للمثال السابق جد الأزمنة المتأخر والزمن الفائض، ثم ارسم الشبكة وحدد عليها المسار الحرج .

الحدث	الحدث السابق	T	ES	EF	LS	LF	S
A	-	10	0	10	0	10	0
B	A	15	10	25	10	25	0
C	A	12	10	22	13	25	3
D	B , C	10	25	35	25	35	0
E	D	11	35	46	35	46	0
F	E	13	46	59	46	59	0
G	E	12	46	58	47	59	1
H	F , G	20	59	79	59	79	0

المسار الحرج للشبكة يتكون من المسارات التالية :

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H$

وعلى الشبكة يكون



أما حساب الازمنة المتأخرة على الشبكة فيكون بنفس طريقة الازمنة المبكرة.

مثال :

ارادت شركة تجهيز مركز حاسوب خاص بالشركة ووضعت خطة انشاء للمشروع حسب الجدول التالي :

الحدث	وصف الحدث	الحدث السابق	الزمن بالايام
A	شراء المباني	-	20
B	وضع المواصفات للاجهزة المراد شرائها	A	8
C	طرح مناقصة شراء الاجهزة	B	3
D	تجهيز الغرف	B	25
E	دراسة العروض	C , D	4
F	شراء الاجهزة	E	5
G	تدريب الايدي العاملة	E	15
H	توفير مستلزمات الاجهزة الثانوية	F	3
I	تركيب الاجهزة	H	6
J	العمل على الاجهزة	I , G	2

المطلوب :

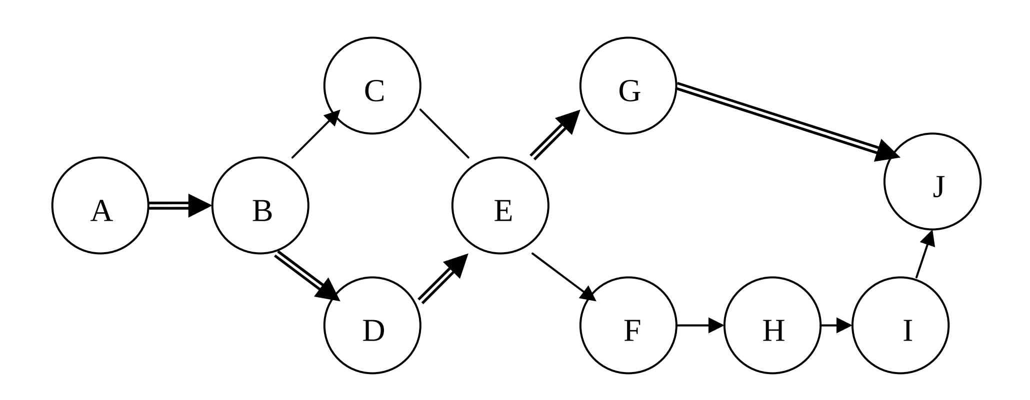
أ- ارسم شبكة الأعمال.

ب- تحديد المسار الحرج عن طريقة وضع جميع المسارات.

ج- حساب الازمنة المبكرة والمتأخرة.

د- تحديد الزمن الفائض .

الحل : أ-



ب- المسار الأول $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow J$

زمنه $20 + 8 + 3 + 4 + 15 + 2 = 52$

المسار الثاني $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow J$

زمنه $20 + 8 + 25 + 4 + 15 + 2 = 74$

المسار الثالث $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$

زمنه $20 + 8 + 3 + 4 + 5 + 3 + 6 + 2 = 51$

المسار الرابع $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow H \rightarrow I \rightarrow J$

زمنه $20 + 8 + 25 + 4 + 5 + 3 + 6 + 2 = 73$

ويكون المسار الحرج هو المسار الثاني وزمن الانجاز للمشروع = 74 يوم

ج ، د- الازمنة المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض

الحدث	الحدث السابق	T	ES	EF	LS	LF	S
A	-	20	0	20	0	20	0
B	A	8	20	28	20	28	0
C	B	3	28	31	50	53	22
D	B	25	28	53	28	53	0
E	C , D	4	53	57	53	57	0
F	E	5	57	62	58	63	1
G	E	15	57	72	57	72	0
H	F	3	62	65	63	66	1
I	H	6	65	71	66	72	1
J	G , I	2	72	74	72	74	0

د- الزمن الفائض في العمود الأخير S

المسار الحرج عن طريقة الازمنة المبكرة والمتأخرة هو

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G \rightarrow J$

وهو نفس المسار الذي حصلنا عليه في البند (ب)

مثال:

الجدول التالي يمثل مجموعة من الانشطة وازمنتها بالاسبوع

النشاط	الزمن t
1 – 2	7
1 – 3	5
2 – 4	2
3 – 5	6
4 – 5	7
5 – 6	2
6 – 7	3
5 – 8	12
6 – 8	8
8 – 9	3

المطلوب:

1- حساب الازمنة المبكرة والمتأخرة

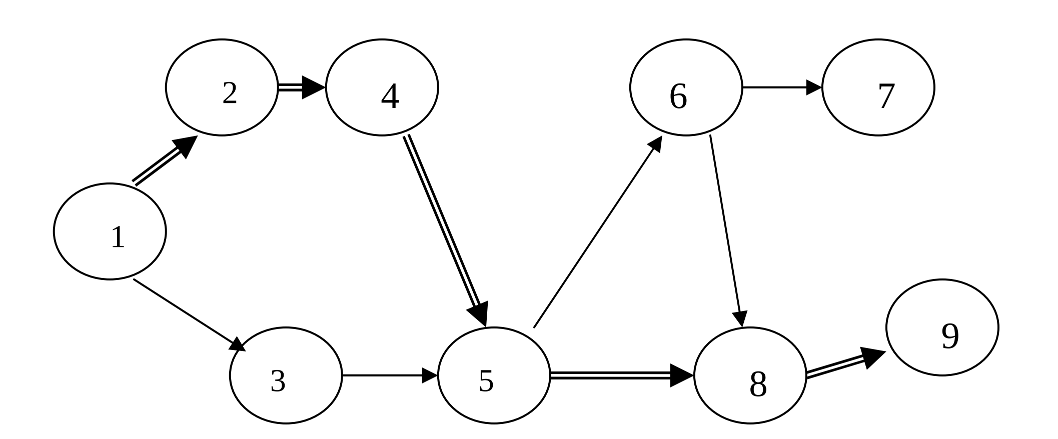
2- حساب الزمن الفائض

3- رسم الشبكة وتحديد المسار الحرج عليها

الحل:

1- الازمنة المبكرة والمتأخر والفائض

النشاط	T	ES	EF	LS	LF	S
1 – 2	7	0	7	0	7	0
1 – 3	5	0	5	5	10	5
2 – 4	2	7	9	7	9	0
3 – 5	6	5	11	10	16	5
4 – 5	7	9	16	9	16	0
5 – 6	2	16	18	18	20	2
6 – 7	3	18	21	28	31	10
5 – 8	12	16	28	16	28	0
6 – 8	8	18	26	20	28	2
8 – 9	3	28	31	28	31	0



ب- تقييم ومراجعة المشاريع "بيرت"

Program Evaluation and Review Technique "PERT"

يعتبر اسلوب بيرت من الأساليب الحديثة في الادارة فقد كانت بدايته في الخمسينات من القرن الماضي وقد طور لمساعدة البحرية الامريكية في إحدى الغواصات ويعمل أسلوب بيرت في عمليات تقييم ومراجعة المشاريع.

تتميز شبكة بيرت عن شبكة (CPM) بان الزمن المعنى فيها يكون على ثلاثة أوقات

1- الوقت التفاؤلي : Optimistic Time "O"

وهو اقصر وقت محتمل لانجاز النشاط ويرمز له بالرمز "O"

2- الوقت الأكثر إحتمالاً : Most likely time "M"

وهو وقت انجاز النشاط في ظل الظروف الطبيعية ويرمز له بالرمز "M"

3- الوقت التشاؤمي : Pessimistic time "P"

ويمثل أطول وقت لانجاز النشاط بحيث يفترض وجود عوائق كثير للانجاز ويرمز له بالرمز "P"

ومن هذه الاوقات الثلاث نحسب الزمن المتوقع (Expected time "Et") للنشاط حيث نستخدم العلاقة :

$$Et = \frac{O + 4M + P}{6}$$

ويستخدم أيضاً أسلوب بيرت في حساب احتمال انجاز المشروع في زمن قدره (D) حسب الخطوات التالية :

1- نجد تباين كل نشاط من الانشطة الحرجة ونرمز له بالرمز S_u^2

$$S_u^2 = \left(\frac{P - 0}{6} \right)^2$$

2- نحسب الانحراف المعياري للمسار الحرج σ

$$\sigma = \sqrt{\sum S_u^2}$$

3- نحسب قيمة Z حيث

$$Z = \frac{D - U}{\sigma}$$

حيث u هي زمن انجاز المشروع (زمن المسار الحرج)

4- يكون إحتمال انجاز المشروع قيمة المساحة من جدول توزيع Z المرفق في نهاية الكتاب مضروبة في 100%

مثال :

الجدول التالي يمثل مشروع ما

النشاط Active	الوقت التفاؤلي O	الوقت الاكثر احتمالا M	الوقت التشاؤمي P
$1 \rightarrow 2$	6	10	14
$1 \rightarrow 3$	10	12	14
$1 \rightarrow 4$	12	16	26
$2 \rightarrow 5$	8	10	12
$3 \rightarrow 4$	4	7	10
$3 \rightarrow 5$	4	6	8
$4 \rightarrow 5$	8	12	16
$5 \rightarrow 6$	3	5	7

المطلوب

1- حساب الوقت المتوقع لكل نشاط .

2- حساب الازمنة المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض.

3- رسم شبكة الأعمال وتحديد المسار الحرج عليها.

4- حساب تباين الانشطة الحرجة والانحراف المعياري.

5- إحتمال انجاز المشروع في (40) يوم وفي (34) يوم .

الحل:

النشاط 1 – 2

$$Et = \frac{6+4*10+14}{6} = 10$$

النشاط 1 – 3

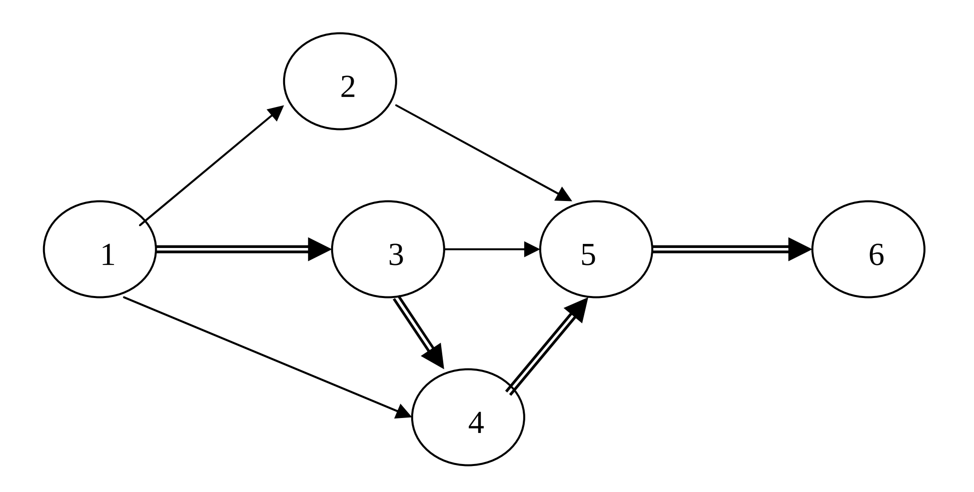
$$Et = \frac{10+4*12+14}{6} = 12$$

وهكذا نحسب الوقت المتوقع لكل الانشطة ونضعها في الجدول كالآتي :

النشاط	0	M	P	Et	Es	EF	LS	LF	S	S_u^2
1 – 2	6	10	14	10	0	10	11	21	11	-
1 – 3	10	12	14	12	0	12	0	12	0	0.44
1 – 4	12	16	26	17	0	17	2	19	2	-
2 – 5	8	10	12	10	10	20	21	31	11	-
3 – 4	4	7	10	7	12	19	12	19	0	1
3 – 5	4	6	8	6	12	18	25	31	13	-
4 – 5	8	12	16	12	19	31	19	31	0	1.78
5 – 6	3	5	7	5	31	36	31	36	0	0.44

2- الازمنة المبكرة والمتأخر والزمن الفائض في الجدول أعلاه .

3- رسم الشبكة



والمسار الحرج هو :

$1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

وزمن الانجاز للمشروع هو : U = 36

4- تباين الانشطة الحرجة هو :

$$S_u^2(1 \rightarrow 3) = \left(\frac{14-10}{6}\right)^2 = 0.44$$

$$S_u^2(3 \rightarrow 4) = \left(\frac{10-4}{6}\right)^2 = 1$$

$$S_u^2(4 \rightarrow 5) = \left(\frac{16-8}{6}\right)^2 = 1.78$$

$$S_u^2(5 \rightarrow 6) = \left(\frac{7-3}{6}\right)^2 = 0.44$$

الانحراف المعياري

$$\sigma = \sqrt{0.44 + 1 + 1.78 + 0.44} = 1.91$$

5- احتمال انجاز المشروع في (40) يوم هو

$$Z = \frac{40 - 36}{1.91} = 2.09$$

ومن جدول التوزيع الطبيعي تكون المساحة = 0.9817

∴ إحتمال انجاز المشروع في 40 يوم = P

$\therefore$ P = 0.9817 * 100% = 98. 17 %

إحتمال انجاز المشروع في 34 يوم

$$Z = \frac{34 - 36}{1.91} = -1.05$$

من جدول التوزيع الطبيعي المساحة = 1 – 0.8531

= 0.1469

∴ احتمال انجاز المشروع في (34) يوم هو :

P = 0.1469 * 100%

= 14.69%

مثال:

الجدول التالي والذي يمثل برنامج الانتاج لاحدى المصانع :

الحدث	الحدث السابق	الوقت التفاؤلي O	الوقت الاكثر احتمالاً M	الوقت التشاؤمي P
A	-	6	8	10
B	A	3	6	9
C	A	1	3	5
D	A	2	4	12
E	C	2	3	4
F	B	3	4	5
G	C	2	2	2
H	E , D	3	7	11
I	F , G	2	4	6
J	E , D	1	4	7
K	E , D	1	10	13
L	F , G	7	8	9
M	I , H	8	9	10
N	L , M	6	7	8
O	J , K	5	0	7

المطلوب

1- حساب الوقت المتوقع لكل حدث .

2- حساب الازمنة المبكرة والمتأخرة والزمن الفائض .

3- رسم الشبكة وتحديد المسار الحرج عليها.

4- حساب احتمال انجاز المشروع في (40) يوم.

الحل :

$$Et_A = \frac{6+4*8+10}{4} = 8$$

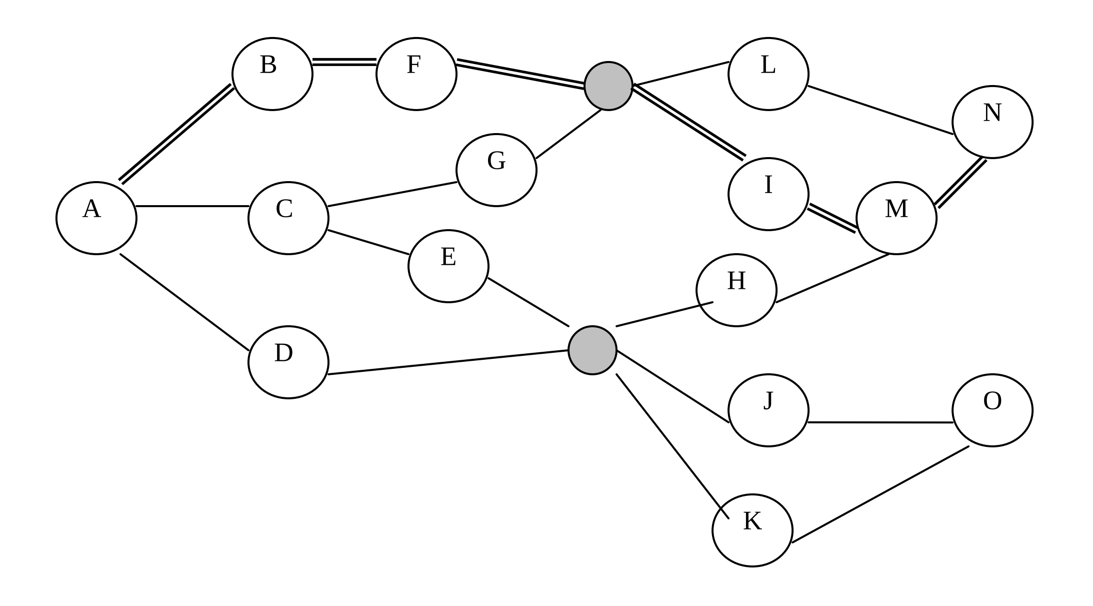
$$Et_B = \frac{3+4*6+9}{4} = 6$$

ونكمل باقي الاحداث على الجدول كالآتي:

الحدث	الحدث السابق	O	M	P	Et	Es	EF	LS	LF	S	S_u^2
A	-	6	8	10	8	0	8	0	8	0	0.44
B	A	3	6	9	6	8	14	8	14	0	1
C	A	1	3	5	3	8	11	9	12	1	
D	A	2	4	12	5	8	13	10	15	2	
E	C	2	3	4	3	11	14	12	15	1	
F	B	3	4	5	4	14	18	14	18	0	0.11
G	C	2	2	2	2	11	13	16	18	5	
H	E , D	3	7	11	7	14	21	15	22	1	
I	F , G	2	4	6	4	18	22	18	22	0	0.44
J	E , D	1	4	7	4	14	18	28	32	14	
K	E , D	1	10	13	9	14	23	23	32	9	
L	F , G	7	8	9	8	18	26	23	31	5	
M	I , H	8	9	10	9	22	31	22	31	0	0.11
N	L, M	6	7	8	7	31	38	31	38	0	0.11
O	J , K	5	6	7	6	23	29	32	38	9	

2- حساب الازمنة على الجدول اعلاه.

3- رسم الشبكة والمسار الحرج محدد عليها.



4- لحساب احتمال انجاز المشروع في (40) يوم

أ- يحسب S_u^2 كما في الخانة الاخيرة في الجدول

ب- نحسب الانحراف المعياري حيث

$$\sigma = \sqrt{0.44 + 1 + 0.11 + 0.44 + 0.11 + 0.11}$$

$$= \sqrt{2.21} = 1.5$$

جـ- نحسب قيمة Z حيث

$$Z = \frac{D - U}{\sigma} = \frac{40 - 38}{1.5} = \frac{2}{1.5} = 1.33$$

من جدول التوزيع الطبيعي تكون المساحة 0.9082

$\therefore$ احتمال انجاز المشروع في (40) يوم هو

D = 0.9082 * 100% = 90.82%

حساب التكلفة والتكلفة المعجلة للمشروع

من الأمور المهمة في التخطيط للمشاريع هو حساب التكلفة الجزئية والكلية للمشروع. ويقوم حساب التكلفة للمشروع بحساب التكلفة لكل نشاط ثم جمعها لتعطي التكلفة الكلية للمشروع وحساب التكلفة يعطي الادارة تصوراً كاملاً للنفقات الواجبة خلال المشروع وما هي الميزانية المقررة لهذا المشروع ويمكن حساب معدل التكلفة الاسبوعية أو الشهرية وذلك لتحديد المبلغ الواجب رصده في كل فترة زمنية وذلك عن طريق حساب التكلفة الاجمالية وقسمتها على زمن المسار الحرج.

مثال:

الجدول التالي يعطي الانشطة والزمن والتكلفة الاسبوعية لكل نشاط

النشاط	الزمن المتوقع بالاسبوع	التكلفة الاسبوعية بالاف دينار	تكلفة النشاط
1-2	4	5	20
1-3	6	10	60
2-4	2	3	6
3-4	6	2	12
3-5	4	10	40
4-6	4	5	20
5-6	2	8	16
		المجموع	174

المطلوب :

1- حساب التكلفة لكل نشاط

2- حساب التكلفة الاجمالية للمشروع

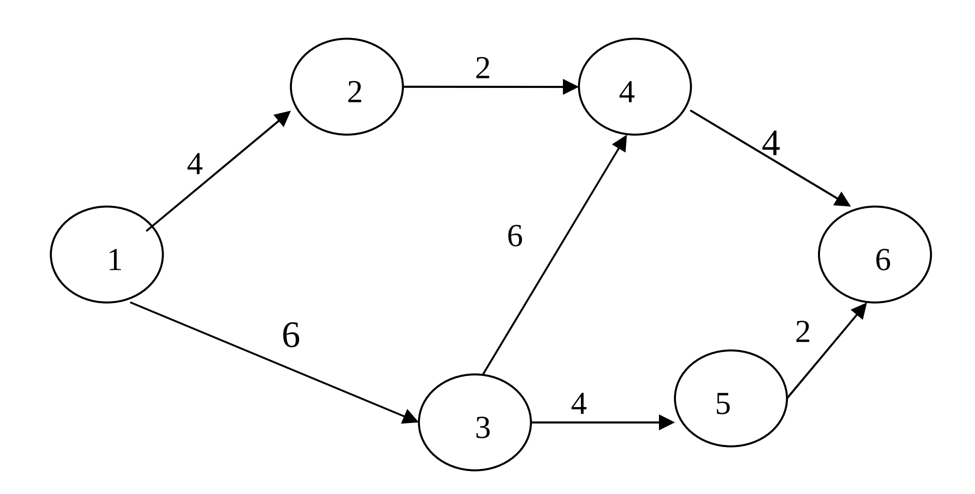
3- رسم الشبكة وتحديد المسار الحرج

4- حساب معدل التكلفة الاسبوعية

الحل :

1- تكون تكلفة الانشطة كما في العمود الرابع في الجدول

2- نجمع عمود التكلفة للانشطة وتكون التكلفة الكلية للمشروع هي (174) الف دينار.



نحسب المسار الحرج عن طريق حساب المسارات كلها

المسار الأول $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

زمنه $4 + 2 + 4 = 10$

المسار الثاني $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$

زمنه $6 + 6 + 4 = 16$

المسار الثالث $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 6$

زمنه $6 + 4 + 2 = 12$

$\therefore$ يكون المسار الحرج المسار الثاني وزمنه 16 أسبوع

4- معدل التكلفة الاسبوعية للمشروع = $\frac{174}{16}$

= 10.875 الف دينار اسبوعيا

يهتم كثر من المقاولين ورجال الأعمال بانهاء المشروع قبل الوقت المقرر لذلك لانـه يفيـد في تـوفير الوقـت وبالتـالي يعطي نتائج اقتصادية أفضل والتعجيل في المشروع أو كما يسمية البعض ضغط الزمن للمشروع سيزيد من الكلفة حيث تكون العلاقة بين تسريع الزمن والكلفة علاقة عكسية فيكون ميل خط الكلفة على الزمن هو

$$\text{Trend} = \frac{DC}{\Delta T} = \frac{Cc - Cn}{Tn - Tc}$$

وهذا القانون يمثل الكلفة الاضافية لضغط وحدة زمن واحدة لكل نشاط حرج حيث:

التكلفة المعجلة Cc = Crach Cost

التكلفة الطبيعية Cn = Normal Cost

الزمن الطبيعي Tn = Normal Time

الزمن المعجل Tc = Crach Time

والتعجيل كما أسلفنا يكون لانشطة الحرجة اكثر من الانشطة الاخرى وذلك لأن الانشـطة غـير الحرجـة لهـا وقـت اضافي وبالتالي تعجيلها لا يعجل في المشروع.

ولكن تعجيل الانشطة له حد أدنى حيث يكون الضغط لا يؤثر على المسار الحرج ولذلك يكـون اقصىـ حـد لضـغط الزمن هو الفرق بين زمن المسار الحرج وزمن المسار الذي يليه فقط.

ولكن قبل حساب التعجيل نحتاج إلى حساب الزمن الاعتيادي لكل نشاط والكلفة المتوقعة للنشاط وكلفة التعجيل لهذا النشاط وهذا الحساب يكون من خلال الفنيين المختصين في الشركة .

مثال :

الجدول التالي يمثل الازمنة والتكاليف المضغوطة والاعتيادية لاحد المشاريع

الحدث	الحدث السابق	الزمن باليوم		التكلفة	
		العادي	المضغوط	العادي	المضغوط
A	-	12	12	2000	2000
B	A	20	16	6000	8000
C	A	10	8	1000	1600
D	B	8	2	800	5000
E	D	18	14	600	3000
F	D , C	4	2	1600	3200
G	E , F	6	3	600	2000
				12600	

المطلوب:

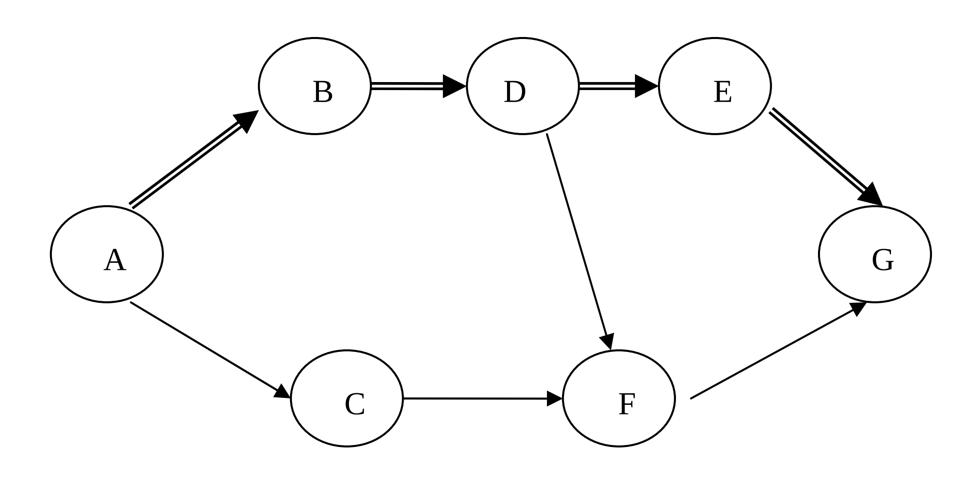
1- رسم الشبكة وتحديد المسار الحرج

2- حساب التكلفة الاجمالية للمشروع وحساب تكلفة التعجيل لكل حدث .

3- تعجيل المشروع لمدة 14 يوم وحساب التكلفة الاجمالية للتعجيل.

الحل :

1- نرسم الشبكة في البداية



المسارات

المسار الأول $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$

زمنه $12 + 20 + 8 + 18 + 6 = 64$

المسار الثاني $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$

زمنه $12 + 20 + 8 + 4 + 6 = 50$

المسار الثالث $A \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G$

زمنه $12 + 10 + 4 + 6 = 32$

$\therefore$ المسار الحرج $A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$

2- التكلفة الاجمالية للمشروع نحسبها على الجدول من التكلفة الاعتيادية فتكون التكلفة 12600 دينار .

أما تكلفة التعجيل لكل حدث فهي على الجدول التالي :

الحدث	الحدث السابق	الزمن باليوم		التكلفة		$\frac{\Delta C}{\Delta T}$
		Tn	Tc	Cn	Cc	
A	-	12	12	2000	2000	0
B	A	20	16	6000	8000	500
C	A	10	8	1000	1600	300
D	B	8	2	800	5000	700
E	D	18	14	600	3000	600
F	D , C	4	2	1600	3200	800
G	E , F	6	3	600	2000	466.67

كما ذكرنا سابقاً يكون التعجيل لاحداث المسار الحرج فقط بحيث يكون التعجيل فقط لـ 14 يوم

الحدث A : لا يوجد تعجيل لهذا الحدث

الحدث B يكون التعجيل 4 أيام من 20 يوم فضغطه 16 يوم والزيادة في التكلفة تكون

$500 \times 4 = 2000$ دينار

الحدث D يتم تعجيله 6 أيام اخرى وتكلفة هذا التعجيل $6 \times 700 = 4200$ دينار

الحدث E يتم تعجيله أيضا 4 أيام بتكلفة تعجيل تساوي $4 \times 600 = 2400$ دينار

وهنا يكون مجموع أيام التعجيل 14 يوم وهي المدة المسموح بها للتعجيل، أما تأثير التعجيل على المسارات الاخرى فيكون

المسار الحرج

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow G$

$12 + 16 + 2 + 14 + 6 = 50$

المسار الثاني

$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow G$

12 + 16 + 2 + 4 + 6 = 40

المسار الثالث

A → C → F → G

12 + 10 + 4 + 6 = 32

أما التكلفة الاجمالية للتعجيل فهي = 2000 + 4200 + 2400

= 8600 دينار

وبالتالي تصبح التكلفة الاجمالية للمشروع هي

12600 + 8600 = 21200

ملاحظة في بعض الأحيان تعطي تكلفة غير مباشرة للمشروع وهذه التكلفة تكون عبارة عن مصاريف نثرية أو تكاليف مصاحبة للمشروع ولكن ليست ضمن نشاطات المشروع ولحساب التكلفة الكلية نضيف هذه التكاليف

ففي مثالنا السابق اذا كانت التكلفة غير المباشرة اليومية هي 15 دينار فإن

التكلفة الاجمالية قبل الضغط = 12600 + 15 * 64

و 12600 + 960 = 13560 دينار

أما التكلفة بعد الضغط فتكون = 15 * 50 = 750

= 21200 + 750 = 21950 دينار

تمارين

س1: أرسم شبكة الأعمال للجدول التالي:

الحدث	الحدث السابق
A	---
B	---
C	A
D	A,B
E	C
F	D,E
G	F
H	E,F,G
I	H
J	G
K	I,J

س2: الجدول التالي يمثل الحدث والحدث السابق والزمن بالشهر لمشروع ما:

الحدث	الحدث السابق	الزمن
A	---	5
B	A	6
C	B	8
D	B	4
E	C,D	7
F	E	10
G	E	6
H	F,G	12

أ. أرسم شبكة الأعمال التي تمثل هذا المشروع.
ب. إحسب زمن البدء والإنجاز المبكر لأحداث المشروع.
ج. إحسب زمن البدء والإنجاز المتأخر لأحداث المشروع.
د. إحسب الزمن الفائض للأحداث.
هـ. حدد المسار الحرج للمشروع.

س3: يتكون مشروع بسيط من تسعة أحداث مبينة مددها الزمنية كما في الجدول التالي:

الحدث	الحدث السابق	المدة الزمنية اللازمة بالأيام
A	لا يوجد	10
B	لا يوجد	8
C	A,B	5
D	C	9
E	C	6
F	C,D,E	4
G	F	4
H	F	3
I	G,H	8

أ. أرسم شبكة الأعمال للمشروع أعلاه.
ب. إحسب الأزمنة المبكرة والأزمنة المتأخرة لتنفيذ كل حدث والزمن الفائض لكل حدث، وزمن إنجاز المشروع الكلي.
ج. حدد المسار الحرج.

س4: المعلومات الواردة في الجدول التالي تتعلق بالأحداث المتبعة لإنتاج أجهزة راديو:

الحدث	وصف الأحداث	الأحداث السابق	المدة الزمنية اللازمة بالأيام
A	دراسة المواصفات المرغوبة تسويقاً	لا يوجد	12
B	وضع التصاميم والأشكال الهندسية	A	9
C	توفير المكائن والمستلزمات الرئيسية للإنتاج	A	10
D	توفير الأيدي العاملة اللازمة للإنتاج	C,B	8
E	تنظيم الخطوط الإنتاجية داخل المصنع	C	7
F	تدريب العمال على عمليات التصنيع	D	16
G	توفير المستلزمات الثانوية للإنتاج	E	7
H	الإنتاج	G,F	2

أ. لكل حدث من الأحداث إحسب: زمن البدء المبكر، زمن البدء المتأخر، زمن الإنجاز المتأخر، زمن الإنجاز المبكر، والزمن الفائض.

ب. إرسم شبكة الأعمال.

ج. حدد المسار الحرج، والأحداث الواقعة عليه.

س5: المعلومات المبينة في الجدول التالي تمثل الأحداث اللازمة لإنجاز مشروع ومدتها الزمنية بالأيام.

الحدث	الحدث السابق	المدة الزمنية اللازمة بالأيام
A	لا يوجد	9
B	A	9
C	A	11
D	A	7
E	B,C,D	12
F	B,C,E	15
G	B,F	20
H	C	23
I	F,G,H	12
J	I	5

أ. أرسم شبكة الأعمال للمشروع.

ب. لكل حدث من الأحداث إحسب: الزمن المبكر للبدء ، الزمن المتأخر للبدء، الزمن المبكر للإنجاز، الزمن المتأخر للإنجاز، الزمن الفائض.

ج. حدد المسار الحرج، والأحداث الواقعة عليه.

د. إحسب الزمن اللازم لإنجاز المشروع.

س6: ليكن لديك المعلومات التالية:

الحدث	الحدث السابق	المدة الزمنية اللازمة (بالأيام)
A	لا يوجد	4
B	A	2
C	B	4
D	B	5
E	C,D	7
F	E	6
G	E	7
H	F,G	6
I	H	3

أ. إحسب الوقت اللازم لتنفيذ المشروع.

ب. أرسم المخطط الشبكي مبيناً عليه المسار الحرج.

س7: في ضوء المعلومات التالية للشركة المتحدة للإنشاءات إحسب:

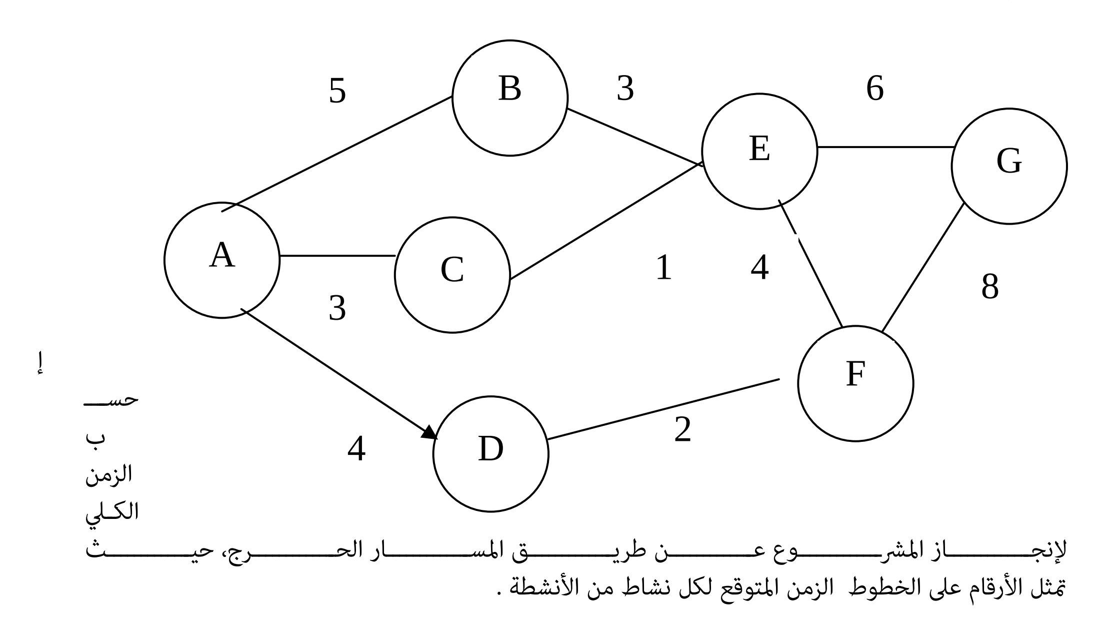
أ. المدة الزمنية اللازمة لإنجاز المشروع.

ب. الزمن الفائض للأحداث المختلفة.

ج. أرسم شبكة الأعمال للمشروع.

الحدث	الحدث السابق	الزمن بالأسابيع
A	لا يوجد	4
B	A	5
C	A	3
D	B	5
E	C	7
F	D,E	2
G	F	6

س8: في شبكة بيرت التالية:



إ حسب الزمن الكلي لإنجاز المشروع عن طريق المسار الحرج، حيث تمثل الأرقام على الخطوط الزمن المتوقع لكل نشاط من الأنشطة .

س9: يتكون مشروع من الأحداث والأزمنة المحتملة التالية:

الحدث	الحدث السابق	الوقت التفاؤلي	الوقت الأكثر إحتمالاً	الوقت التشاؤمي
A	-	5	7	12
B	A	10	11	15
C	A	7	10	13
D	C	12	16	18
E	A,B	14	14	20
F	C,D	15	16	21
G	D	11	12	16
H	E	8	11	14
I	F,H	6	10	12
J	G	12	17	18
K	I,J	7	8	10
L	H,K	16	18	19

أ. أوجد الوقت المتوقع لكل نشاط.
ب. أرسم شبكة بيرت للمشروع.
ج. حدد المسار الحرج لشبكة بيرت.
د. تباين الانشطة الحرجة والانحراف المعياري.

س10: الجدول التالي يمثل الأزمنة المحتملة لمشروع ما:-

النشاط	الوقت التفاؤلي	الوقت الأكثر إحتمالاً	الوقت التشاؤمي
$1 \rightarrow 2$	2	8	11
$1 \rightarrow 3$	7	9	14
$2 \rightarrow 4$	5	8	10
$3 \rightarrow 4$	7	11	16
$4 \rightarrow 5$	5	5	6
$4 \rightarrow 6$	9	10	11
$4 \rightarrow 7$	8	11	15
$5 \rightarrow 8$	7	7	7
$6 \rightarrow 8$	4	8	10
$7 \rightarrow 9$	6	7	9
$8 \rightarrow 9$	12	15	20

إحسب:
أ. الزمن المتوقع لكل نشاط.
ب. زمن الإنجاز للمشروع عن طريق حساب الأزمنة المبكرة للمشروع.

ج. زمن البدء والإنجاز المتأخر والزمن الفائض لكل نشاط.
د. احتمال انجاز المشروع في 55 يوم ، 52 يوم .

س11 : الجدول التالي يعطي الوقت والتكلفة الطبيعية والوقت والتكلفة المضغوطة لمشروع ما .

النشاط	الطبيعي		المضغوط	
	الوقت	التكلفة	الوقت	التكلفة
1 – 2	3	300	2	400
2 – 3	3	30	3	30
2 – 4	7	420	5	580
2 – 5	9	720	7	810
3 – 5	5	250	4	300
4 – 5	0	0	0	0
5 – 6	6	320	4	410
6 – 7	4	400	3	470
6 – 8	13	780	10	900
7 – 8	10	1000	9	1200

المطلوب

1- ارسم شبكة الاعمال وحدد عليها المسار الحرج .
2- ما هي التكلفة الاجمالية للمشروع.
3- جد الوقت الامثل لضغط المشروع وما هي تكلفته.

س12 : الجدول التالي يمثل أحد المشاريع

النشاط	النشاط السابق	الوقت		الكلفة	
		طبيعي	مضغوط	طبيعية	مضغوطة
A	-	10	7	20	30
B	-	8	6	15	20
C	D	5	4	8	14
D	B	6	4	11	15
E	B	8	5	9	15
F	E	5	4	5	8
G	A , D , C	12	8	3	4

اذا كانت التكلفة غير المباشرة (400) دينار في اليوم . إحسب

1- إجمالي التكاليف للوقت الاعتيادي

2- إجمالي التكاليف للوقت المضغوط

الوحدة السادسة

نظرية اتخاذ القرار

Decision Theory

الوحدة السادسة

نظرية اتخاذ القرار

Decision Theory

مقدمة :

كان اتخاذ القرار قديماً يعتمد أكثر شيء على الخبرة والتجارب السابقة وبعض الاحيان بالفطرة واحيانا أخرى بالتجريب والصواب والخطأ. ومع التقدم العلمي وظهور النظريات الادارية الحديثة وظهور الحاسوب أخذت عملية اتخاذ القرار تأخذ منحنى آخر يعتمد الأسلوب العلمي والأسلوب الكمي في اتخاذ القرار حيث أصبح اتخاذ القرار يعتمد على الطرق الرياضية والاحصائية وتقنيات الحاسوب وبالتالي أصبح اتخاذ القرار يستخدم المنطق العلمي بدلاً التجربة والخطأ والأساليب العشوائية وأصبح استخدام الحاسوب يوفر على متخذي القرار الوقت والجهد ويساعدهم في اتخاذ القرار حيث يستطيع الحاسوب حل المسائل المعقدة ويستطيع تخزين كماً كبيراً من المعلومات واسترجاعها في الوقت المناسب وبسرعة كبيرة جداً وايضاً حسن استخدام الحاسوب في النوعية والكفاءة في الاعمال الادارية والتنظيمية. إن اتخاذ القرار الاداري السليم مبني على قاعدة كبيرة من البيانات التي يمكن من خلالها إجراء التحليلات الرياضية المتكاملة التي توصلنا إلى اتخاذ القرار بتنظيم مختلف العمليات الادارية.

حالات اتخاذ القرار

تقسم عملية اتخاذ القرار الى ثلاثة حالات :

1- الحالة الأولى: اتخاذ القرار في حالة التأكد التام :

إن متخذ القرار في هذه الحالة يعلم بدقة الظروف المحيطة بالموضوع الذي يتطلب اتخاذ القرار فيه، وتكون نتائج القرار معلومة مسبقاً.

2- الحالة الثانية: اتخاذ القرار في حالة المخاطرة

يكون هناك الكثير من الظروف والمتغيرات المحتمل حدوثها ويعلم متخذ القرار بهذه المتغيرات والظروف وعليه تحديد نسبة حدوث كل ظرف من هذه الظروف.

3- الحالة الثالثة: اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد

وهنا متخذ القرار لا يعلم أي من احتمالات حدوث أي من الظروف أو المتغيرات المتوقع حدوثها مستقبلاً.

وسنتعرض لهذه الحالات الثلاث لاحقاً بالتفصيل.

مكونات نموذج اتخاذ القرار :

1- البدائل :

وهي الاستراتيجيات أو الخيارات المتاحة لمتخذ القرار مثل: اذا أراد مستثمر تطوير مصنعه فله بديلان الأول الاقتراض من البنك والبديل الآخر مشاركة تاجر آخر مقابل التخلي عن جزء من الأرباح.

2- حالات الطبيعة

وهي مجموعة العوامل المؤثر في اتخاذ القرار وليس لمتخذ القرار سلطة عليها ولا يستطيع التحكم بها ولكنها تؤثر على البدائل مثل الظروف المناخية الظروف الاجتماعية والظروف الاقتصادية.

3- مصفوفة الدفع

وهي النتائج التي نحصل عليها من تفاعل البدائل والحالات الممكنة وتكون على شكل مصفوفة تمثل الصفوف البدائل الممكنة والاعمدة تمثل الحالات الطبيعية.

4- احتمالات الحالات الطبيعية :

كل حالة من حالات الطبيعة لها فرصة محددة في الحدوث وهذه الفرصة تسمى احتمال ويمكن ان يكون الاحتمال متساوي

اتخاذ القرار في حالة التأكد التام : Decisions Under Certainty

لا يوجد في هذه الحالة أي تأثير للمحيط الخارجي على متخذ القرار بحيث يكون التأكد من نتيجة كل خيار من الخيارات ويكون هناك حالة طبيعية واحدة فقط.

ويكون القرار في هذه الحالة اختيار أعلى قيمة اذا كانت المسألة تتعلق بالربح وأقل قيمة اذا كانت تتعلق بالتكلفة.

مثال :

مصنع لانتاج الاجهزة الكهربائية له ثلاثة بدائل

البديل	ربح الوحدة الواحدة
تلفاز	95
جهاز تسجيل	45
جهاز اقراص مدمجة	20

فما هو البديل الافضل للمصنع

الحل:

البديل الافضل الذي يحقق أعلى عائد هو التلفاز

اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد : Decisions under Uncertainty

في البداية نكون مصفوفة صفوفها البدائل واعمدتها الحالات ونفترض أن جميع الحالات لها نفس الاحتمال وتسمى هذه المصفوفة مصفوفة الدفع Pay off matrix

حيث تكون مصفوفة الدفع على الصورة

حالات الطبيعة البدائل	b_1	b_2	…..	b_m
a_1	a_{11}	a_{12}	…..	a_{1m}
a_2	a_{21}	a_{22}	…..	a_{2m}
:	:			:
:	:			:
a_n	a_{n1}	a_{n2}	…..	a_{nm}

إن اتخاذ القرار في حالة عدم التأكد يتعلق بمواقف يتعذر فيها التنبؤ بالنتائج الممكنة لعدم توفر المعلومات الكافية وهذه الحالة تحدث باستمرار في الحياة العملية ولهذا فلها اهمية كبرى.

وهناك عدة معايير لاتخاذ القرار وتحدد المعيار حسب متخذ القرار ولا يوجد معيار افضل من الآخر فكل معيار له ظروفه وحالاته. وسنشرح هذه المعايير بالتفصيل

1- معيار الاحتمالات المتساوية (معيار لابلاس) Laplace Criteria

في هذه الحالة نأخذ المتوسط الحسابي للحالات لكل بديل ويكون البديل الافضل:

أ- اعلى قيمة في حالة الأرباح

ب- ادنى قيمة في حالة التكاليف

مثال:

اذا كانت مصفوفة الدفع التالية تمثل ثلاثة مجالات للاستثمار في ثلاثة حالات مختلفة

الحالات بدائل الاستثمار	b_1	b_2	b_3
a_1	3.5	41	66
a_2	0	45	75
a_3	-10	41	76

جد البديل الافضل والذي يحقق أعلى عائد بطريقة لابلاس

ملاحظة:

يمكن أن يكون في مصفوفة العوائد قيمة سالبة وهذه تعنى خسارة بمقدار (10) في هذه الحالة (b_1)

الحل:

نجد الوسط الحسابي لكل حالة "أي نجمع القيم ونقسمها على عددها"

$$a_1 = \frac{3.5 + 41 + 66}{3} = 36.83$$

$$a_2 = \frac{0 + 45 + 75}{3} = 40$$

$$a_3 = \frac{-10 + 41 + 76}{3} = 35.67$$

$\therefore$ يكون البديل الافضل هو البديل (a2) ويحقق (40)

2- معيار التشاؤم : (معيار وولد Wald Criteria)

أ- في حالة الأرباح : نأخذ أدنى قيمة في كل صف ونضعها في عمود التشاؤم ثم نختار أعلى الادنى.

أي $Max\ (min\ O_{ij})$

مثال:

لنأخذ المثال السابق

	b_1	b_2	b_3	معيار التشاؤم
a_1	3.5	41	66	3.5
a_2	0	45	75	0
a_3	-10	41	76	-10

$Max\ (Min) = 3.5$

∴ البديل الافضل هو البديل (a_1)

ب- في حالة التكاليف : نأخذ أعلى قيمة في كل صف ثم نأخذ منها القيمة الادنى

أي $Min\ (Max\ O_{ij})$

3- معيار التفاؤل : Optimistic Criteria

نختار في هذه الحالة أفضل الأفضل

أ- في حالة الأرباح: نأخذ أعلى قيمة في كل صف ثم نختار منها الأعلى أي

$Max\ (Max\ O_{ij})$

مثال:

سنأخذ نفس المثال السابق

	b_1	b_2	b_3	معيار التفاؤل
a_1	3.5	41	66	66
a_2	0	45	75	75
a_3	-10	41	76	76

Max (Max) = 76

∴ يكون البديل الافضل هو البديل (a_3)

ب- في حالة التكاليف : نأخذ أقل قيمة في كل صف ثم نختار منها الاقل أي

Min (Min O_{ij})

4- معيار الواقعية (معيار هورويز Hurwiez Criteria)

يجمع هذا المعيارين معياري التفاؤل والتشاؤم حيث تعطي نسبة للتفاؤل ولتكن α وتكون نسبة التشاؤم (1 - α) وبضرب معيار التفاؤل بنسبته والتشاؤم بنسبته ونجمعهما ونأخذ

أ- أعلى قيمة في الارباح

ب- أقل قيمة في التكاليف

مثال:

في المثال السابق اذا كانت نسبة معيار التفاؤل (0.7) فإن نسبة معيار التشاؤم (1-0.7=0.3) وعليه لنأخذ البدائل ومعيار التفاؤل والتشاؤم فقط .

البديل	معيار التفاؤل	معيار التشاؤم
a_1	66	3.5
a_2	75	0
a_3	76	-10

$a_1 = 66 * 0.7 + 3.5 * 0.3 = 47.25$

$a_2 = 75 * 0.7 + 0 * 0.3 = 52.5$

$a_3 = 76 * 0.7 + (-10) * 0.3 = 50.2$

ويكون البديل الافضل بهذه الطريقة هو البديل a2

5- معيار الندم (معيار سفاج Savage Criteria)

نطبق هذه الطريقة لأعلى عائد حسب الخطوات التالية:

- نأخذ اكبر قيمة في كل عمود ويطرح منه كل قيم العمود

- نكون من النواتج مصفوفة تسمى مصفوفة الندم

- نأخذ اكبر قيمة في كل صف ونضعها في عمود يسمى عمود الندم

- نختار من عمود الندم أقل قيمة ندم حيث تمثل قيم هذا العمود مقدار الندم الذي نحصل عليه جراء اختيارنا لهذا البديل وبالتالي يكون الاختيار لأقل معيار ندم .

مثال :

في المثال السابق كون مصفوفة الندم وحدد البديل الافضل باستخدام طريقة معيار الندم.

مصفوفة الدفع

	b_1	b_2	b_3
a_1	3.5	41	66
a_2	0	45	75
a_3	-10	41	76

مصفوفة الندم

	b_1	b_2	b_3	معيار الندم
a_1	0	4	10	10
a_2	3.5	0	1	3.5
a_3	13.5	4	0	13.5

ويكون البديل الافضل صاحب أقل معيار ندم وهو البديل a_2

ملاحظة: في حالة التكاليف نأخذ أصغر قيمة في البداية ونطرحها من كل القيم ونتابع بنفس طريقة أعلى عائد.

مثال:

اذا كانت مصفوفة الدفع التالية مصفوفة تكاليف والتي تمثل شراء آلة لمصنع فإذا كانت تكاليف الشراء البدائل والطلب على السلع الحالات

الحالة البديل	طلب عالي	طلب متوسط	طلب منخفض	لا يوجد
شراء آلة كبيرة a1	30	15	10	0
شراء آلة صغيرة a2	20	10	5	2
عدم الشراء a3	15	10	7	8

أوجد البديل الافضل لتقليل التكاليف بالمعايير التالية :

1- معيار لابلاس

2- معيار وولد (التشاؤم)

3- معيار التفاؤل

4- معيار هورولز اذا كان معامل التفاؤل 60%

5- معيار سفاج

الحل:

1- معيار لابلاس

$$a_1 = \frac{30+15+10+0}{4} = 13.75$$

$$a_2 = \frac{20+10+5+2}{4} = 9.25$$

$$a_3 = \frac{15+10+7+8}{4} = 10$$

يكون البديل الافضل صاحب أقل تكلفة هو (a2) أي شراء آلة صغيرة

2- معيار وولد (نأخذ أكبر قيمة في كل صف ثم نأخذ القيمة الأقل)

البديل	معيار التشاؤم
a_1	30
a_2	20
a_3	15

Min (Max) = 15

$\therefore$ البديل الافضل هو البديل الافضل (a_3)

أي عدم شراء آلة

3- معيار التفاؤل : (نأخذ أقل قيمة في كل صف ثم نأخذ القيمة الأقل)

البديل	معيار التفاؤل
a_1	0
a_2	2
a_3	7

Min (Min) = 0

∴ البديل الافضل هو البديل الاول (a1) وهو شراء آلة كبيرة

4- معيار هورويز (الواقعية)

البديل	معيار التفاؤل 0.60	معيار تشاؤم 0.40
a_1	0	30
a_2	2	20
a_3	7	15

$a_1 = (0)\ (0.6) + (30)\ (0.4) = 12$

$a_2 = (2)\ (0.6) + (20)\ (0.4) = 9.2$

$a_3 = (7)\ (0.6) + (15)\ (0.4) = 10.2$

∴ البديل الافضل هو البديل الثاني (a_2)

وهو شراء آلة صغيرة

5- معيار سفاج (الندم)

تكون مصفوفة الندم

	1	2	3	4	معيار الندم
a_1	15	5	5	0	15
a_2	5	0	0	2	5
a_3	0	0	2	8	8

البديل الافضل هو صاحب أقل قيمة ندم وهو البديل الثاني (a_2) وهو شراء آلة صغيرة

اتخاذ القرار في ظل المخاطرة : Decision Under Risk

يكون في هذه الحالة متخذ القرار يعلم مسبقاً بنسبة كل حالة من الحالات وهناك طريقتان للحل:

1- معيار القيمة المتوقعة Expected Monetary Value (EMV)

بحساب البديل الافضل باستخدام القيمة المتوقعة (EMV) نتبع الخطوات التالية:

- يكون لكل حالة من الحالات نسبة معينة بحيث يكون مجموع هذه النسب = 1

- نجد (EMV) لكل بديل وذلك بضرب قيمة التكلفة بالنسبة لكل حالة ثم جمعها

- يكون البديل الافضل صاحب اكبر قيمة اذا كانت المصفوفة أرباح وأقل قيمة اذا كانت تكاليف

- نحسب القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الصحيحة

Expected Value of Perfect Information (EVPI)

وذلك بضرب اكبر قيمة في كل عمود في نسبتهما وجمع النواتج

- تكون قيمة الفرصة الضائعة (أي قيمة الندم) هي :

EVPI – EMV

مثال :

اذا كان لديك مصفوفة الدفع التالية والتي تمثل مصفوفة عوائد

	0.1 b_1	0.2 b_2	0.4 b_3	0.3 b_4
a_1	140	140	140	140
a_2	130	160	160	160
a_3	120	150	180	180
a_4	110	140	170	200

أوجد البديل الافضل باستخدام معيار القيمة المتوقعة وجد مقدار الندم الحاصل عند اختيار هذا البديل.

الحل:

$EMV(a_1) = 140 * 0.1 + 140 * 0.2 + 140 * 0.4 + 140 * 0.3$

$= 14 + 28 + 56 + 42 = 140$

$EMV(a_2) = 130 * 0.1 + 160 * 0.2 + 160 * 0.4 + 160 * 0.3$

$= 13 + 32 + 64 + 48 = 157$

$EMV(a_3) = 120 * 0.1 + 150 * 0.2 + 180 * 0.4 + 180 * 0.3$

$= 12 + 30 + 72 + 54 = 168$

$EMV(a_4) = 110 * 0.1 + 140 * 0.2 + 170 * 0.4 + 200 * 0.3$

$= 11 + 28 + 68 + 60 = 167$

∴ البديل الافضل هو البديل الثالث (a3)

القيمة المتوقعة في ظل المعلومات الصحيحة

$EVPI = 140 * 0.1 + 160 * 0.2 + 180 * 0.4 + 200 * 0.3$

$= 14 + 32 + 72 + 60 = 178$

أما مقدار الفرص الضائعة (الندم) من اختيار البديل الثالث هي:

178 – 168 = 10

ملاحظة :

اذا كانت مصفوفة الدفع مصفوفة تكاليف فإن (EVPI) تكون حاصل ضرب اصغر قيمة في كل عمـود بنسـبتها ثـم جمع النواتج. أما مقدار الندم (الفرص الضائعة) فإنها تكون:

EMV – EVPI

مثال: لمصفوفة التكاليف التالية :

	0.35 b_1	0.15 b_2	0.5 b_3
a_1	5	7	4
a_2	3	2	5
a_3	7	1	6
a_4	1	3	7

جد البديل الافضل ومقدار الفرص الضائعة

الحل:

EMV (a1) = 5 * 0.35 + 7 * 0.15 + 4 * 0.5

= 1.75 + 1.05 + 2 = 4.8

EMV (a2) = 3 * 0.35 + 2 * 0.15 + 5 * 0.5

= 1.05 + 0.3 + 2.5 = 3.85

EMV (a3) = 7 * 0.35 + 1 * 0.15 + 6 * 0.5

= 2.45 + 0.15 + 3 = 5.6

EMV (a4) = 1 * 0.35 + 3 * 0.15

= 0.35 + 0.45 + 3.5 = 4.3

∴ يكون البديل الافضل صاحب أقل قيمة وهو البديل الثاني (a2)

EVPI = 1 * 0.35 + 1 * 0.15 + 4 * 0.5

= 0.35 + 0.15 + 2 = 2.5

∴ قيمة الندم تكون

EMV – EVPI = 3.85 – 2.5 = 1.35

2- طريقة مصفوفة الندم :

في هذه الطريقة نحدد البديل الأفضل باتباع الخطوات التالية :

- نجد مصفوفة الندم كما في حالة عدم التأكد
- نحسب لكل بديل القيمة المتوقعة لمصفوفة الندم
- يكون البديل الافضل صاحب أقل ندم
- تكون قيمة الندم بهذه الطريقة نفس قيمة الندم بطريقة القيمة المتوقعة

مثال:

لنأخذ المثال الأول في طريقة القيمة المتوقعة

	0.1 b_1	0.2 b_2	0.4 b_3	0.3 b_4
a_1	140	140	140	140
a_2	130	160	160	160
a_3	120	150	180	180
a_4	110	140	170	180

الحل:

مصفوفة الندم

	0.1 b_1	0.2 b_2	0.4 b_3	0.3 b_4
a_1	0	20	40	60
a_2	10	0	20	40
a_3	20	10	0	20
a_4	30	20	10	0

EMV (a1) = 0 * 0.1 + 20 * 0.2 + 40 * 0.4 + 60 * 0.3

= 0 + 4 + 16 + 18 = 38

EMV (a2) = 10 * 0.1 + 0 * 0.2 + 20 * 0.4 + 40 * 0.3

= 1 + 0 + 8 + 12 = 21

EMV (a3) = 20 * 0.1 + 10 * 0.2 + 0 * 0.4 + 20 * 0.3

= 2 + 2 + 0 + 6 = 10

EMV (a4) = 30 * 0.1 + 20 * 0.2 + 10 * 0.4 + 0 * 0.3

= 3 + 4 + 4 + 0 = 11

∴ البديل الافضل هو صاحب أقل قيمة ندم وهو البديل الثالث (a3) ومقدار الندم = 10 وهذه نفس القيمة في طريقة القيمة المتوقعة .

مثال:

إحسب البديل الافضل لمصفوفة التكاليف التالية باستخدام مصفوفة الندم

	0.35 b_1	0.15 b_2	0.5 b_3
a_1	5	7	4
a_2	3	2	5
a_3	7	1	6
a_4	1	3	7

الحل:

مصفوفة الندم

	0.35 b_1	0.15 b_2	0.5 b_3
a_1	4	6	0
a_2	2	1	1
a_3	6	0	2
a_4	0	2	3

EMV (a1) = 4 * 0.35 + 6 * 0.15 + 0 * 0.5

= 1.4 + 0.9 + 0 = 2.3

EMV (a2) = 2 * 0.35 + 1 * 0.15 + 1 * 0.5

= 0.7 + 0.15 + 0.5 = 1.35

EMV (a3) = 6 * 0.35 + 0 * 0.15 + 2 * 0.5

= 2.1 + 0 + 1 = 3.1

EMV (a4) = 0 * 0.35 + 2 * 0.15 + 3 * 0.5

= 0 + 0.3 + 1.5 = 1.8

∴ البديل الافضل هو صاحب أقل قيمة ندم وهو البديل الثاني (a2) وقيمة الندم فيه (1.35)

شجرة اتخاذ القرار Decision Tree :

يتم رسم شجرة اتخاذ القرار وايجاد القيمة المتوقعة على النحو التالي:

1- نرسم في البداية مربع □ يخرج منه بدائل القرار

2- من كل بديل نرسم دائرة O يخرج منها حالات الطبيعة ويكتب عليها احتمال كل حالة وقيمتها.

3- نضرب كل قيمة من قيم الحالات في نسبتها ونجمعها لكل بديل ويكون البديل الافضل صاحب اكبر قيمة في حالة الاستثمار واصغر قيمة في حالة التكاليف.

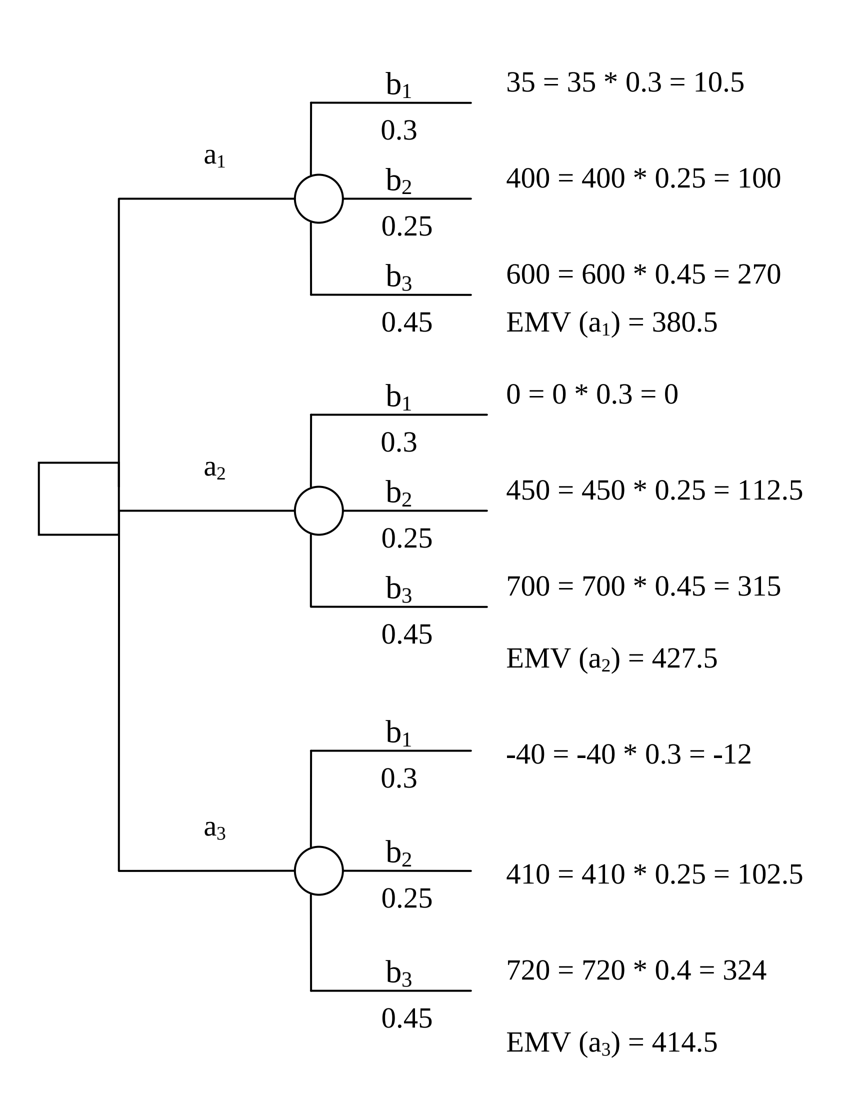
مثال:

اذا كان لدى مستثمر ثلاثة بدائل للاستثمار a1 , a2 , a3 وهناك ثلاثة حالات للطبيعة b1,b2, b3 فإذا كانت احتمالات هذه الحالات هي على الترتيب 0.3, 0.25, 0.45 وكانت مصفوفة الدفع هي :

	b_1	b_2	b_3
a_1	35	400	600
a_2	0	450	700
a_3	-40	410	720

استخدم شجرة القرارات في تحديد البديل الافضل

الحل:



يكون البديل الأفضل صاحب اكبر قيمة وذلك لان المصفوفة مصفوفة استثمار

∴ البديل الافضل هو (a2)

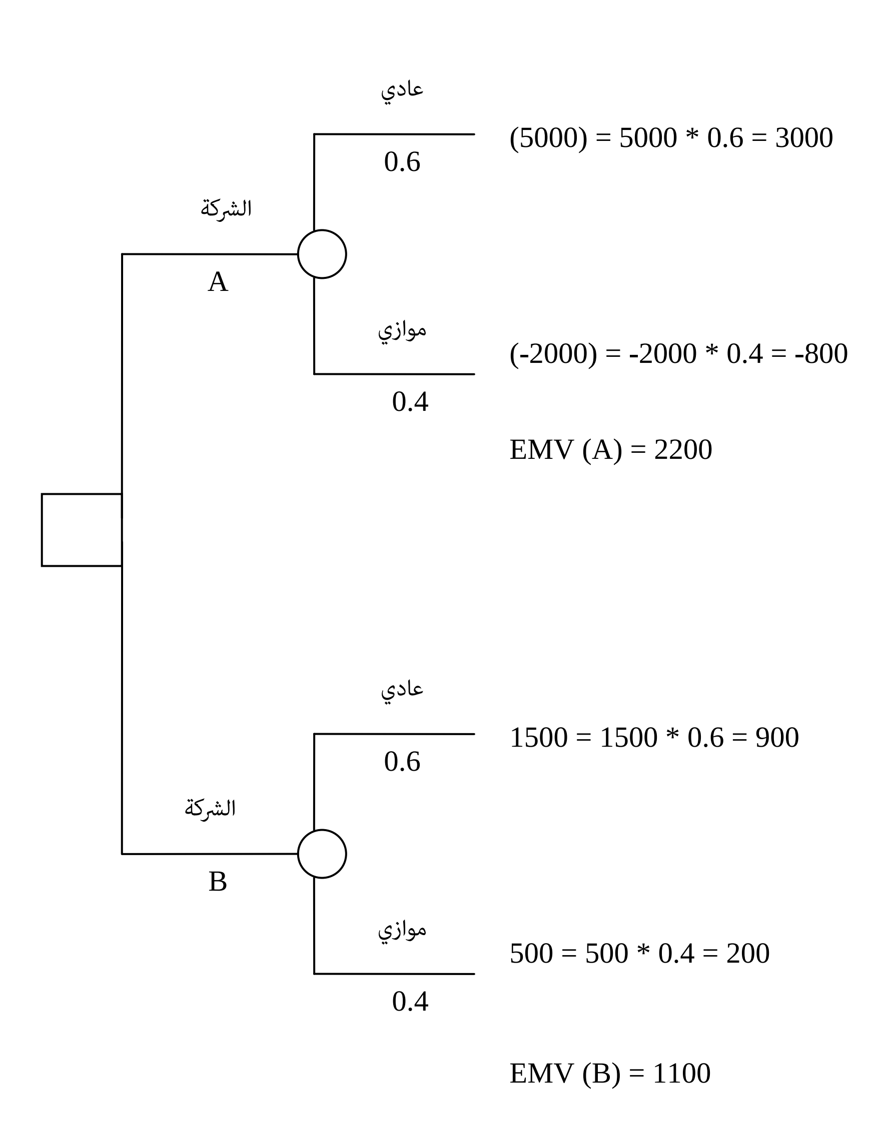
مثال :

أراد مستثمر أن يستثمر ($ 10000) في سوق الاسهم وذلك بشراء اسهم في إحدى شركتين A, B فإذا كانت الاسهم تطرح للشركتين في نوعين من الاسواق السوق العادي والسوق الموازي. واذا كانت نسبة التداول في السوق العادي 60% والموازي 40% والجدول التالي يعطي الأرباح لكلا الشركتين على 10000 دولار في السوقين.

النسبة السوق الشركة	0.6 عادي	0.4 موازي
A	5000	-2000
B	1500	500

استخدم شجرة الاحتمال في مساعدة هذا المستثمر في أي الشركتين يجب أن يستثمر.

الحل:



∴ البديل الافضل في الاستثمار هو شركة A

تمارين

س1 : اراد مستثمر ان يستثمر مليون دينار في بلد ما وكان هناك ثلاثة مجالات للاستثمار والأرباح الناجحة عن هذه الاستثمارات هي كالآتي:

مجال الاستثمار	الربح السنوي المتوقع بالالف دينار
الاسكان	250
انشاء مصنع	120
الاسهم	240

أي المجالات افضل للاستثمار

س2 : اذا واجه المستثمر في السؤال الأول ثلاثة حالات اقتصادية هي ركود، انتعاش، تضخم وكانت الارباح الناتجة عن كل من هذه الحالات هي:

مجال الاستثمار	ركود	انتعاش	تضخم
الاسكان	10-	250	450
مصنع	30	120	200
الاسهم	0	240	400

أوجد البديل الافضل للاستثمار بالطرق التالية :

أ- الاحتمالات المتساوية (لابلاس)

ب- معيار التشاؤم

ج- معيار التفاؤل

د- معيار الواقعية (هورويز) اذا كانت نسبة التفاؤل 75%

هـ- معيار الندم (سفاج)

س3 : في مصفوفة الدفع التالية والتي تمثل مصفوفة تكاليف اذا كان لدينا أربعة بدائل وأربعة حالات

الحالة البديل	b1	b2	b3	b4
a1	20	24	12	5
a2	35	25	10	0
a3	20	25	15	5
a4	10	20	15	10

جد البديل الافضل للاستثمار بأحد المعايير التالية :

أ- لابلاس

ب- التفاؤل

ج- التشاؤم

د- الواقعية اذا كانت نسبة التفاؤل 60%

هـ- سفاج

س4 : اذا كان أمام مستثمر ثلاثة بدائل للاستثمار هي الاتصالات، الالكترونيات، والتصوير واذا كان إحتمال ان ينخفض الطلب في السوق 10% واحتمال يكون الطلب متوسط 50% والطلب المرتفع 40% ، الجدول التالي يمثل الأرباح التي يمكن أن يجنيها المستثمر في كل بديل

الحالة البديل	منخفض	متوسط	مرتفع
الاتصالات	5	7	8
الالكترونيات	-10	5	30
التصدير	2	7	20

جد أي البدائل أفضل باستخدام:

1- معيار القيمة المتوقعة

2- مصفوفة الندم

س5 : مصنع لديه ثلاثة خطوط انتاج فإذا كانت تكلفة الانتاج حسب نسبة الانتاج التالية A= 20% ، B= 30% ، C = 10% ، D= 40% هي كما في الجدول

نسبة الانتاج خط الانتاج	A	B	C	D
1	7	9	3	5
2	2	4	6	8
3	5	8	6	1

فإذا أراد المصنع أن يشغل خط انتاج واحد لخفض التكاليف فأي الخطوط يجب أن يشغل باستخدام

أ- معيار القيمة المتوقعة

ب- مصفوفة الندم

س6 : أعد حل السؤال الخامس باستخدام شجرة القرار

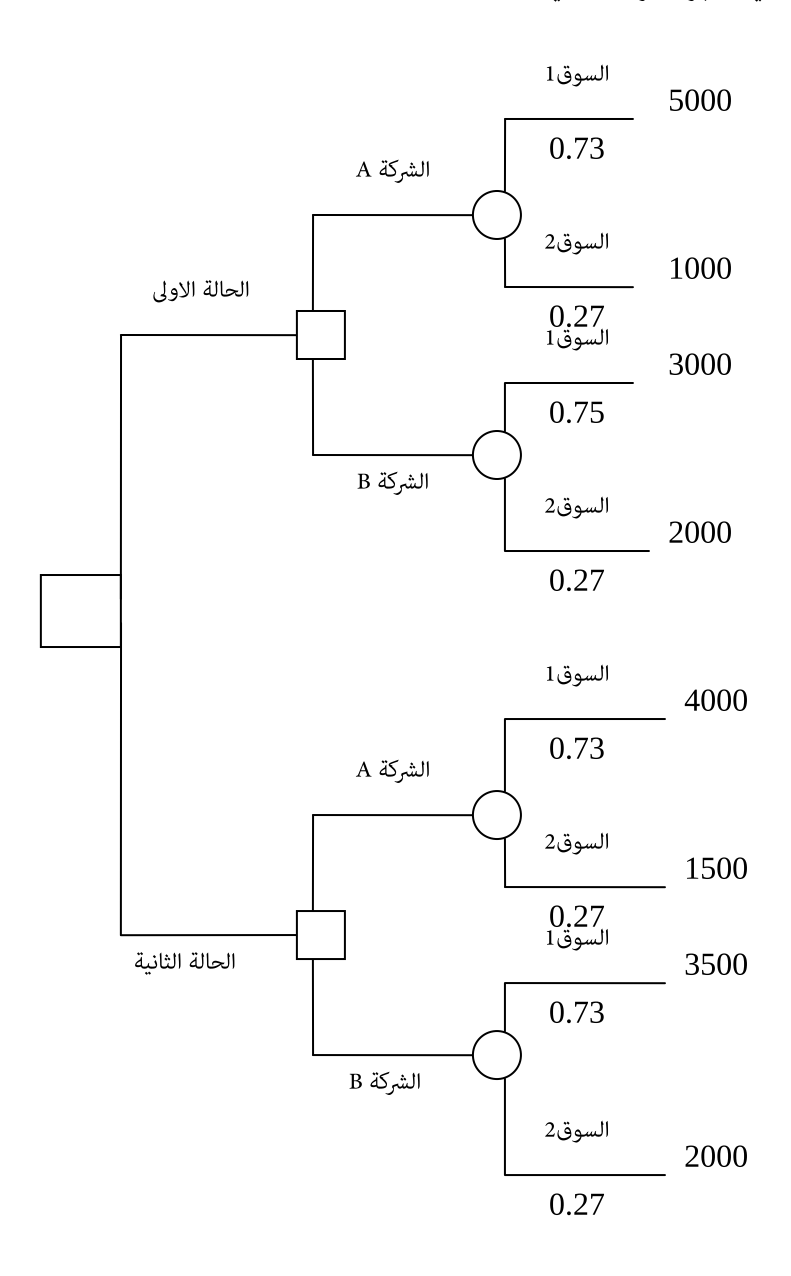
س7 : اراد صاحب مصنع زيادة أرباح المصنع وكانت لديه خمسة بدائل البديل A الإبقاء على جميع المنتجات الحالية وزيادة إنتاجها البديل B تقليل عدد المنتجات والتركيز على انتاج أنواع أقل بكميات اكبر ، البديل C الابقاء على عدد من المنتجات مع تغير البعض الآخر منها، البديل D تغيير جميع المنتجات وانتاج منتجات جديدة ، البديل E بيع المصنع والتوجه للاستثمار في مجال آخر فإذا كانت حالات السوق الثلاثة ونسبها هي ركود بنسبة 15% ، انتعاش بنسبة 50% وتضخم بنسبة 35% فإذا كانت العوائد المتوقعة من هذه البدائل هي :

الحالة **البديل**	**ركود**	**انتعاش**	**تضخم**
A	5	3	8
B	2	4	6
C	1	5	6
D	0	4	9
E	-2	5	10

ساعد صاحب المصنع بايجاد البديل الافضل باحدى الطرق

1- معيار القيمة المتوقعة
2- مصفوفة الندم
3- شجرة القرارات

س8 : اذا كانت لديك شجرة القرارات التالية :



اذا كان السوق1 يمثل السوق المحلي والسوق 2 يمثل التصدير ففي كلا الحالتين أي الشركتين يجب الاستثمار فيها.

الوحدة السابعة

نظرية الالعاب

Game Theory

الوحدة السابعة

نظرية الالعاب

Game theory

مقدمة :

يرجع الفضل في تكوين نظرية الالعاب إلى العالم جون فون نيومان الذي أرسى قواعد نظرية الألعاب في العام 1928 إلى العام 1933 وبدأ بتطبيقها في النواحي الاقتصادية والحربية عام 1944 ثم بدأت بالتطور إلى يومنا هذا.

وترمز نظرية الألعاب إلى المنافسة بين التجار أو الشركات أو المؤسسات حيث تقوم على المنافسة بين لاعبين ويمكن أن يكون اللاعبان أفراداً أو مؤسسات أو شركات وتكون نتيجة المباراة خسارة لأحدهم وربح للآخر وهناك نوعين من النتائج في المباريات.

1- اللعبة ذات المجموع الصفري: أي أن ربح الأول = خسارة الثاني

2- أن لا يكون المجموع صفري أي أنه ليس بالضرورة أن يكون خسارة الأول تساوي ربح الثاني وبالعكس.

وتعرف اللعبة بأنها مجموعة القواعد والقوانين التي تستخدم في اتخاذ القرار في مسألة إدارية أو اقتصادية أو عسكرية.

عناصر اللعبة :

1- اللاعبون : Players

يمكن أن تكون المباراة بين فريقين أو أكثر ويمكن أن يكون الفريق شخص أو شركة أو مؤسسة وستقتصر دراستنا على الفريقين فقط.

2- مصفوفة الدفع : Pay off Matrix وتتكون من :

أ- العوائد ويمكن أن تكون ربحاً أو خسارة.

ب- الاستراتيجيات: وهي الخطط التي توضع من قبل المتسابقين ولكل لاعب استراتيجياته الخاصة به.

3- نتيجة المباراة : وهناك نتيجتان للمباراة

أ- المباراة ذات المجموع الصفري وهذا يعني أن ما يربحه الفريق الأول يساوي تماماً ما يخسره الفريق الثاني.

ب- المباراة ذات المجموع غير الصفري وهنا ليس بالضرورة أن يكون ما يربحه الأول يساوي ما يخسره الثاني.

المباراة بين شخصين ذات المجموع الصفري:

في هذا النوع من المباريات يكون كسب الأول بمقدار خسارة الثاني ويمكن ان يلعب كل لاعب بأكثر من استراتيجية وتسمى الاستراتيجية في هذه الحالة استراتيجية التوازن. أما طريقة الحل فتكون حسب الخطوات التالية:

1- نجد اصغر قيمة في كل صف ونضعها في عمود (Min) ثم نختار من هذا العمود اكبر قيمة أي Maxmin فتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الأول ونرمز لها بالرمز V_1 .

2- نجد اكبر قيمة في كل عمود ونضعها في صف Max ثم نأخذ من هذا الصف أصغر قيمة أي Minmax وتكون هذه قيمة اللعبة بالنسبة للاعب الثاني ونرمز لها بالرمز (V_2)

3- يكون مجموع المباراة صفر اذا كانت $V_1 = V_2$.

وتسمى هذه النقطة نقطة التوازن.

مثال: اذا كان لديك مصفوفة الدفع التالي:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	8	-2	9	-3
X_2	6	5	6	8
X_3	-2	4	-9	-1

أوجد قيمة المباراة بالنسبة للاعبين الاثنين ونقطة التوازن .

الحل: نعيد كتابة المصفوفة ونجد عمود Min وصف Max

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Min
X_1	8	-2	9	-3	-3
X_2	6	5	6	8	5
X_3	-2	4	-9	-1	-9
Max	8	5	9	8	

V_1 = Maxmin = 5

V_2 = Minmax = 5

∴ استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب الأول = استراتيجية اللعب بالنسبة للاعب الثاني

نقطة التوازن $V_1 = V_2 = 5$

أما قيمة المباراة فانها $V = V_1 - V_2 = 0$

مثال : لديك مصفوفة الدفع التالي :

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	-4	-5	0
X_2	-3	-4	-9	9
X_3	6	7	-8	-9
X_4	7	3	-9	5

جد قيمة المباراة ونقطة التوازن

الحل:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Min
X_1	4	-4	-5	6	-5
X_2	-5	-4	-9	-2	-9
X_3	6	7	-8	-9	-9
X_4	7	3	-9	5	-9
Max	7	7	-5	6	

$V_2 = \text{Minmax} = -5$

$\therefore\ V_1 = V_2$

أي أن قيمة المباراة = $V = 0$ ونقطة التوازن هي (-5)

المباراة ذات المجموع غير الصفري :

وتسمى أيضاً الاستراتيجية المختلفة عندما لا تتساوى قيمة كسب اللاعب الأول مع خسارة اللاعب أي لا يكون هناك نقطة توازن في هذه الحالة تسمى الاستراتيجية التي يلعب بها اللاعبان الاستراتيجية المختلطة ويمكن حل المباريات من هذا النوع بعدة طرق منها:

1- الطريقة الجبرية 2- طريقة المصفوفات

3- الرسم البياني 4- البرمجة الخطية

أما قيمة المباراة فتكون محصورة بين V_1 , V_2

1- الطريقة الجبرية : Algebric method

تستخدم هذه الطريقة لايجاد احتمالات اللعب بالاستراتيجيات المختلفة لكل لاعب وهناك حالتان لهذه الطريقة هما:

أ- اذا كانت مصفوفة الدفع 2 × 2 أي على الصورة

B / A	Y_1	Y_2
X_1	a_{11}	a_{12}
X_2	a_{21}	a_{22}

حيث يمتلك اللعب الأول A الاستراتيجيات X_1 , X_2 باحتمالات لعب P_1 , P_2 على الترتيب.

ويمتلك اللاعب الثاني B الاستراتيجيات y_1, y_2 باحتمالات لعب q_1, q_2 على الترتيب.

ولايجاد احتمالات اللعب لكل لاعب نستخدم القوانين التالية:

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$$P_2 = 1 - P_1$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$$q_2 = 1 - q_1$$

أما قيمة المباراة فتكون

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

مثال: جد احتمالات اللعب للاعب A واللاعب B وكذلك قيمة المباراة اذا كانت مصفوفة الدفع هي:

B / A	Y_1	Y_2	Min
X_1	-5	10	-5
X_2	5	-10	-10
Max	5	10	

V_1 = Maxmin = -5 V_2 = Minmax = 5

نلاحظ هنا أن $V_1 \neq V_2$ أي أن المجموع لا يساوي صفراً، فتكون احتمالات اللعب للاعب الأول A هي :

$$P_1 = \frac{-10-5}{(-5-10)-(10+5)} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}$$

$$P_2 = 1 - P_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

∴ يكون احتمال أن يلعب اللاعب A بالاستراتيجية $X_1 = 50\%$ و $X_2 = 50\%$

احتمالات اللاعب الثاني B هي :

$$q_1 = \frac{-10-10}{(-5-10)-(10+5)} = \frac{-20}{-30} = \frac{2}{3}$$

$$q_2 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

∴ يكون احتمال أن يلعب اللاعب B بالاستراتيجية $y_1 = 66.67\%$ وأن يلعب بالاستراتيجية $y_2 = 33.33\%$.

أما نتيجة المباراة فهي :

$$V = \frac{(-5*-10)-(10*5)}{(-5-10)-(10+5)} = 0$$

أما مدى المباراة فيكون $-5 < V < 5$

مثال: اذا كانت مصفوفة الدفع هي :

B A	Y_1	Y_2	Min
X_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
X_2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
Max	1	0	

جد :

1- احتمالات اللعب لكل لاعب

2- نتيجة المباراة

1- احتمالات اللعب للاعب A هي :

$$P_1 = \frac{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+0-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$P_2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

∴ يكون احتمال أن يلعب اللاعب بالاستراتيجية X_1 = 25%

واحتمال أن يلعب بالاستراتيجية X_2 = 75%

أما احتمالات اللعب للاعب B هي :

$$q_1 = \frac{0-\left(-\frac{1}{2}\right)}{1+0-\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

$$q_2 = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$V = \frac{(1*0)-\left(-\frac{1}{2}*-\frac{1}{2}\right)}{1+0-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)} = \frac{-\frac{1}{4}}{2} = -\frac{1}{8}$$

ويكون مداها هو $0 > V > -\frac{1}{2}$

ب- اذا كانت مصفوفة الدفع ليست 2 × 2

نختزل المصفوفة ونحولها إلى مصفوفة 2 × 2 وذلك باستبعاد صفوف وأعمدة حتى تصبح المصفوفة 2 × 2 كالآتي:

1- نستبعد الصف الذي تكون جميع عناصره أقل أو يساوي عناصر صف آخر.

2- نستبعد العمود الذي تكون جميع عناصره أكبر أو يساوي عناصر عمود آخر.

مثال: حل المباراة التي مصفوفة الدفع لها هي:

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	-2	2	1	-2
X_2	-1	1	0	-3
X_3	2	-1	3	1
X_4	0	-2	0	1

الحل:

هذه المصفوفة تتبع الاستراتيجية المختلطة وحتى نستطيع حلها يجب أن نختزلها في البداية

1- نستبعد الصف الرابع لأن جميع عناصر أقل أو يساوي عناصر الصف الثالث فتصبح المصفوفة

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	-2	2	1	-2
X_2	-1	1	0	-3
X_3	2	-1	3	1

2- نستبعد العمود الأول لأن جميع عناصره اكبر من عناصر العمود الرابع

	Y_2	Y_3	Y_4
X_2	2	1	-2
X_3	1	0	-2
X_4	-1	3	1

3- نستبعد العمود y_3 لأن جميع عناصره اكبر من y_4

	Y_2	Y_4
X_1	2	-2
X_2	1	-3
X_3	-1	1

4- نستبعد الصف الثاني لان عناصر أصغر من عناصر الصف الأول

	Y_2	Y_4
X_1	2	-2
X_3	-1	1

والآن أصبح لدى كل لاعب استراتيجيتان فبالنسبة للاعب الأول يكون احتمال اللعب بالاستراتيجي X_1 هو P_1 والاستراتيجية X_3 هو P_2 حيث

$$P_2 = 1 - P_1$$

$$P_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{(a_{11} + a_{22}) - (a_{12} + a_{21})}$$

$$\therefore P_1 = \frac{1-(-1)}{(2+1)-(-2-1)} = \frac{2}{3+3} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

وهذا يعني أن $\frac{1}{3}$ عدد المرات للعب تكون بالاستراتيجية X_1

أما بالنسبة للاعب الثاني فإن احتمال اللعب بالاستراتيجية Y_1 هو q_1 والاستراتيجية واللعب بالاستراتيجية Y_2 هو q_2 حيث

$$q_2 = 1 - q_1$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - (a_{12} + a_{21})}$$

$$= \frac{1-(-2)}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$q_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

∴ 50% من المباريات يلعبها اللاعب الثاني بالاستراتيجية الاولى و 50% بالاستراتيجية الثانية.

مثال:

يوجد في مدينة صغيرة سوقان، السوق A والسوق B والزبائن مقسومة بينهما بالتساوي ولأن نوعية البضاعة والسعر جيدان فإن سمعة السوقان ممتازة في المجتمع المحلي، دخل السوقان في منافسة لجذب اكبر عدد من الزبائن لذلك قام كل سوق منهما بعمل دعاية في الجرائد والراديو والتلفاز فكانت النتائج هي:

السوق B السوق A	Y_1 جريدة	Y_2 راديو	Y_3 تلفاز
جريدة X_1	30	40	-80
راديو X_2	0	15	-20
تلفاز X_3	90	20	50

ما هي الاستراتيجية المثلى لكل منهما وما هي احتمالات اللعب لكل استراتيجية

الحل:

الاستراتيجية التي ستتبع هنا هي الاستراتيجية المختلطة. لذا نختزل في البداية المصفوفة حيث نستبعد

1- العمود الأول لأن جميع عناصره اكبر من العمود الثالث.

2- الصف الثاني لان جميع عناصره أقل من الصف الثالث.

تصبح المصفوفة بعد الاختزال:

	Y_2	Y_3
X_1	40	-80
X_3	20	50

يكون احتمال اللعب بالاستراتيجية X_1 للاعب الأول هو P_1 واحتمال اللعب بالاستراتيجية X_2 هو P_2 حيث :

$$P_1 = \frac{50-20}{(40+50)-(20-80)} = \frac{30}{90+60} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$$

∴ احتمال اللعب بالاستراتيجية X_1 هو 20% والاستراتيجية X_3 هو 80% .

أي أن السوق A يخصص 20% من قيمة الدعاية للجريدة و 80% للتلفاز ويستبعد الراديو.

أما بالنسبة للاعب الثاني فإن احتمال اللعب بالاستراتيجية Y_2 هو q_1 واللعب بـ Y_3 هو q_2 .

$$q_1 = \frac{50-(-80)}{(40+50)-(20-80)} = \frac{130}{150} = \frac{13}{15}$$

$$q_2 = 1-\frac{13}{15} = \frac{2}{15}$$

أي أن اللاعب الثاني اذا لعب 15 مرة يكون فيها 13 مرة باستخدام الاستراتيجية Y_2 ومرتان باستخدام Y_3

أي أن السوق B اذا كان سيعمل 15 دعاية فإن 13 منها ستكون في الراديو واثنتان في التلفاز وسيستبعد الجريدة.

2- طريقة المصفوفات : Matrix method

حتى نستطيع استخدام هذه الطريقة يجب أن تكون مصفوفة الدفع مصفوفة مربعة ويكـون الحـل نفـس الشيـء سواء باستراتيجية المجموع الصفري او الاستراتيجية المختلطة حيث يكون الحل بهذه الطريقة بالخطوات التالية:

1- نختزل مصفوفة الدفع ونحولها إلى مصفوفة 2 × 2

A \ B	Y_1	Y_2
X_1	a_{11}	a_{12}
X_2	a_{21}	a_{22}

2- نجد المصفوفتان Padj , Pcof حيث :

$$Padj = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \quad , \quad Pcof = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

3- اذا كانت احتمالات اللعب للاعب الأول A هي P_1 , P_2 تكون قيمتها هي:

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Padj}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Padj \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

4- اذا كانت احتمالات اللعب للاعب الثاني B هي q_1 , q_2 فإن

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Pcof}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} Pcof \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

5- تكون قيمة المباراة V هي

$$V = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

مثال:

حل المباراة التالية :

A \ B	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1	7	2
X_2	6	2	7
X_3	5	1	6

الحل:

نستبعد الصف الثالث لأن جميع قيمه أقل من قيم الصف الثاني

A \ B	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	1	7	2
X_2	6	2	7

نستبعد العمود الثالث لأن جميع قيمه اكبر من قيم العمود الأول

A \ B	Y_1	Y_2
X_1	1	7
X_2	6	2

نجد المصفوفتان Pcof , Padj

$$\text{Padj} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \text{Pcof} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد احتمالات اللعب للاعب الأول P_2 , P_1 حيث

$$[P_1 \quad P_2] = \frac{[1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[1x2 + 1x - 6 \quad 1x - 7 + 1x1]}{[1x2 + 1x - 6 \quad 1x - 7 + 1x1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[-4 \quad -6]}{-4 + -6}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-4}{-10} & \frac{-6}{-10} \end{bmatrix}$$

$\therefore P_1 = 0.4 \qquad P_2 = 0.6$

نجد احتمالات اللعب للاعب الثاني q_1, q_2 حيث

$$[q_1 \quad q_2] = \frac{[1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}}{[1 \quad 1]\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$[q_1 \quad q_2] = \frac{[2 + -7 \quad -6 + 1]}{[2 - 7 \quad -6 + 1]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{[-5 \quad -5]}{-5 - 5} = \begin{bmatrix} \frac{-5}{-10} & \frac{-5}{-10} \end{bmatrix}$$

$\therefore q_1 = 0.5 \qquad q_2 = 0.5$

أما قيمة المباراة V فتكون

$$V = [0.4 \quad 0.6]\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.4+3.6 & 2.8+1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

$= 2 + 2 = 4$

مثال :

لنأخذ المصفوفة التي في المثال من الطريقة الجبرية

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	-2	2	1	-2
X_2	-1	1	0	-3
X_3	2	-1	3	1
X_4	0	-2	0	1

حل هذه المباراة باستخدام طريقة المصفوفات

الحل:

عند اختزالنا للمصفوفة فان المصفوفة المختزلة هي :

	Y_1	Y_2
X_1	2	-2
X_2	-1	1

$$\text{Padj} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{Pcof} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

احتمالات A هي :

$$\begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}}{2+4} = \begin{bmatrix} \frac{2}{6} & \frac{4}{6} \end{bmatrix}$$

$$\therefore P_1 = \frac{1}{3} \qquad P_2 = \frac{2}{3}$$

احتمالات B هي

$$\begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$= \frac{\begin{bmatrix} 3 & 3 \end{bmatrix}}{3+3} = \begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{3}{6} \end{bmatrix}$$

$$\therefore q_1 = \frac{1}{2} \qquad q_2 = \frac{1}{2}$$

أما قيمة المباراة فهي:

$$V = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} - \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} + \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$= 0$

3- طريقة الرسم البياني:

تستخدم هذه الطريقة فقط اذا كان أحد اللاعبين يستخدم استراتيجيتان فقط

ولايجاد احتمالات اللعب وقيمة المباراة نتبع الخطوات:

أ- بالنسبة للاعب الأول (A)

- نرسم عمودين يمثل الأول X_1 والثاني X_2 ونضع على كل منهما قيمة.

- نصل بين النقاط بخطوط مستقيمة.

- يكون البعد بين العمودين = 1

- تكون نقطة تقاطع الخطوط على الخط الافقي قيمة P_1

ب- بالنسبة للاعب الثاني (B) نتبع نفس الخطوات

مثال: المصفوفة الدفع التالية

	Y_1	Y_2
X_1	-2	3
X_2	3	-4

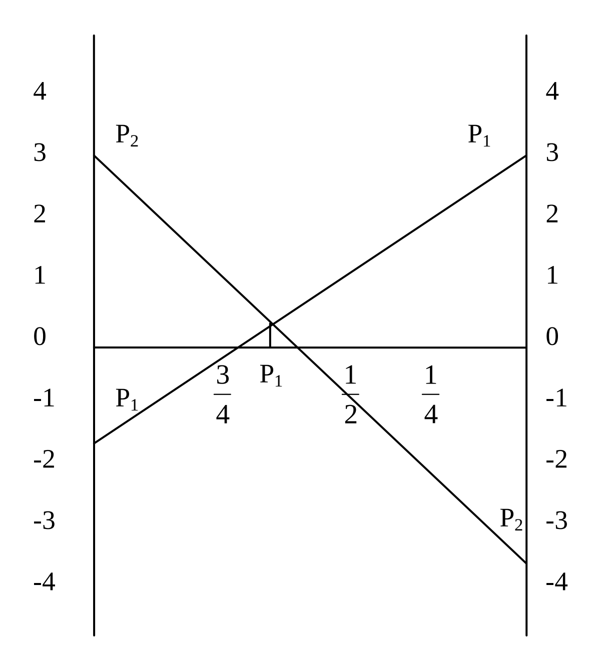
جد احتمالات اللعب وقيمة المباراة.

الحل:

تكون قيم $X_1 = 2 , 3$

وقيم $X_2 = 3 , -4 \Leftarrow (-2, 3) , (3, -4)$

نرسم المباراة بالنسبة للاعب الأول



تكون قيمة P_1 بين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$

لايجاد قيمة P_1 , P_2 بدقة نأخذ المعادلات

$$3P_2 - 2P_1 = 3P_1 - 4P_2$$

$$\Rightarrow 3P_2 + 4P_2 = 3P_1 + 2P_1$$

$$7P_2 = 5P_1 \Rightarrow 3P_1 \Rightarrow P_2 = \frac{5}{7} P_1$$

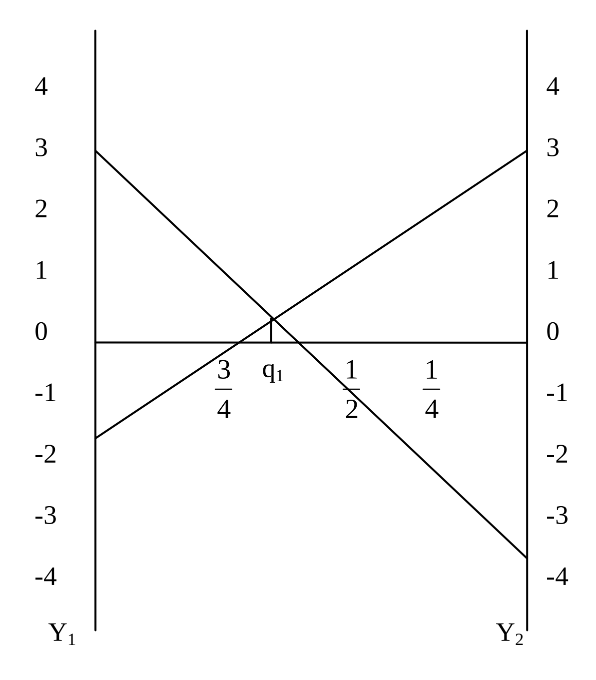
نعوضها في المعادلة

$$P_1 + P_2 = 1$$

$$P_1 + \frac{5}{7} P_1 = 1 \Rightarrow \frac{12}{7} P_1 = 1$$

$$\therefore P_1 = \frac{7}{12} \Rightarrow P_2 = \frac{5}{12}$$

أما بالنسبة للاعب الثاني



تكون q_1 بين $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{4}$ ولايجادها نأخذ المعادلة

$$-2q_1 + 3q_2 = 3q_1 - 4q_2$$

$$7q_2 = 5q_1 \Rightarrow q_2 = \frac{5}{7} q_1$$

نعوضها في المعادلة

$$q_1 + q_2 = 1$$

$$q_1 + \frac{5}{7} q_1 = 1 \Rightarrow q_1 = \frac{7}{12}$$

$$q_2 = \frac{5}{12}$$

لايجاد قيمة المباراة V نعوض في إحدى معادلات P بقيم P_1 , P_2 أو باحدى معادلات q بـ q_2 , q_1

$$V = 3P_2 - 2P_1 = \frac{3*5}{12} - \frac{2*7}{12} = \frac{15-14}{12} = \frac{1}{12}$$

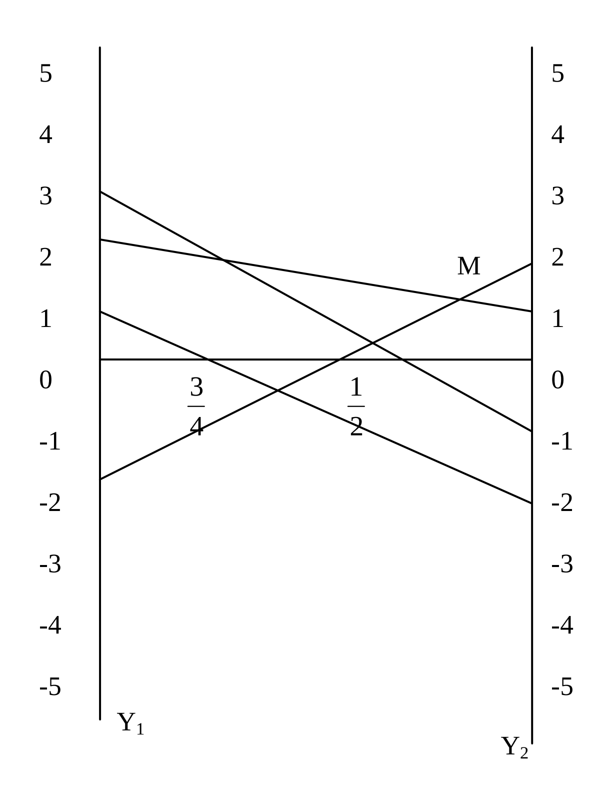
نستطيع رسم المحاور لكلا اللاعبين اذا كانت مصفوفة الدفع 2 × 2 لكن اذا كانت مصفوفة الدفع غير ذلك نرسم فقط للاعب الذي يملك استراتيجيتين أما اللاعب الآخر فنجد قيمته بالمعادلات فقط دون رسم

مثال:

أوجد حل المباراة لمصفوفة الدفع التالية بالطريقة البيانية :

B / A	Y_1	Y_2
X_1	3	-1
X_2	2	1
X_3	1	-2
X_4	-2	2

الحل: نرسم بالنسبة للاعب الثاني فقط حيث



ادنى قيمة لـ q_1 هي نقطة التقاء الاستراتيجيتان X_2, X_4 ونرمز لها بالرمز M وبالتالي عند الحساب نأخذ فقط X_2, X_4 مع Y_1, Y_2 لتكون المصفوفة

	Y_1	Y_2
X_1	2	1
X_2	-2	2

وتكون معادلات B هي :

$2q_1 + q_2 = 2q_1 + 2q_2$

$4q_1 = q_2$

نعوضها في المعادلة

$q_1 + q_2 = 1$

$q_1 + 4q_1 = 1 \Rightarrow q_1 = \frac{1}{5}$

$\therefore\ q_2 = \frac{4}{5}$

أما معادلات A فهي

$2P_1 - 2P_2 = P_1 + 2P_2$

$\Rightarrow P_1 = 4P_2$

نعوضها في المعادلة

$P_1 + P_2 = 1$

$4P_2 + P_2 = 1 \Rightarrow P_2 = \frac{1}{5}$

$\therefore\ P_1 = \frac{4}{5}$

أما قيمة المباراة V فهي

$V = P_1 + 2P_2 = \frac{4}{5} + \frac{2}{5} = \frac{6}{5}$

4- الطريقة المبسطة (البرمجة الخطية) Simplex Method

في هذه الطريقة نحول المصفوفة إلى نموذج برمجة خطية ونحله بطريقة السمبلكس حيث يلعب اللاعب الأول على تعظيم ربحه Max بينما يلعب اللاعب الثاني على تقليل خسارته min

وبالتالي نكون نموذجين الأول للاعب A والثاني للاعب B حيث يكون التعظيم والتقليل لقيمة المباراة V .

ولتوضيح فكرة الحل نأخذ المثال الآتي:

مثال:

حل المباراة التالية باستخدام الطريقة المبسطة

B A	B_1	B_2	B_3
A_1	5	3	7
A_2	7	9	5
A_3	10	6	2

الحل:

أولاً: بالنسبة للاعب A يكون النموذج

دالة الهدف هي: Max Z = V

أما القيود فتكون

$5P_1 + 7P_2 + 10P_3 \geq V$

$3P_1 + 9P_2 + 6P_3 \geq V$

$7P_1 + 5P_2 + 2P_3 \geq V$

$P_1 + P_2 + P_3 = 1$

نقسم المتباينات كلها على V فتصبح

$$5\frac{P_1}{V} + 7\frac{P_2}{V} + 10\frac{P_3}{V} \geq 1$$

$$3\frac{P_1}{V} + 9\frac{P_2}{V} + 6\frac{P_3}{V} \geq 1$$

$$7\frac{P_1}{V} + 5\frac{P_2}{V} + 2\frac{P_3}{V} \geq 1$$

$$\frac{P_1}{V} + \frac{P_2}{V} + \frac{P_3}{V} = \frac{1}{V}$$

نفرض $X_1 = \frac{P_1}{V}, X_2 = \frac{P_2}{V}, X_3 = \frac{P_3}{V}$

ودالة الهدف تتحول من $Max\ Z = V$ إلى $Min\ Z = \frac{1}{V}$

$$\Rightarrow MinZ = X_1 + X_2 + X_3$$

أما القيود

$5X_1 + 7X_2 + 10X_3 \geq 1$

$3X_1 + 9X_2 + 6X_3 \geq 1$

$7X_1 + 5X_2 + 2X_3 \geq 1$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

ثانياً: بالنسبة للاعب B يكون النموذج

دالة الهدف $Min\ Z = V$

والقيود تكون على الصورة

$5q_1 + 3q_2 + 7q_3 \leq V$

$7q_1 + 9q_2 + 5q_3 \leq V$

$10q_1 + 6q_2 + 2q_3 \leq V$

$q_1 + q_2 + q_3 = 1$

ايضاً بنفس الطريقة نقسم على V فتصبح

$$5\frac{q_1}{V} + 3\frac{q_2}{V} + 7\frac{q_3}{V} \leq 1$$

$$7\frac{q_1}{V} + 9\frac{q_2}{V} + 5\frac{q_3}{V} \leq 1$$

$$10\frac{q_1}{V} + 6\frac{q_2}{V} + 2\frac{q_3}{V} \leq 1$$

$$\frac{q_1}{V}+\frac{q_2}{V}+\frac{q_3}{V}=\frac{1}{V}$$

نفرض

$$Y_1=\frac{q_1}{V}, Y_2=\frac{q_2}{V}, Y_3=\frac{q_3}{V}$$

نحول دالة الهدف من $MinZ = V \Rightarrow Maz\ Z = \frac{1}{V}$

$\Rightarrow Max\ Z = Y_1 + Y_2 + Y_3$

أما القيود

$5Y_1 + 3Y_2 + 7Y_3 \leq 1$

$7Y_1 + 9Y_2 + 5Y_3 \leq 1$

$10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 \leq 1$

$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$

نلاحظ أن النموذج الثاني هو النموذج المقابل للنموذج الأول ولايجاد احتمالات اللعب وقيمة المباراة نجد حل أحد النموذجين بطريقة السمبلكس والاسهل النموذج الثاني

الشكل القياسي للنموذج

$Z - Y_1 - Y_2 - Y_3 = 0$

S. t

$5Y_1 + 3Y_2 + 7Y_3 + S_1 = 1$

$7Y_1 + 9Y_2 + 5Y_3 + S_2 = 1$

$10Y_1 + 6Y_2 + 2Y_3 + S_3 = 1$

$Y_1 , Y_2 , Y_3 , S_1 , S_2 , S_3 \geq 0$

نكون جدول الحل الابتدائي

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	-1	-1	-1	0	0	0	0	
S_1	5	3	7	1	0	0	1	$\frac{1}{5}$
S_2	7	9	5	0	1	0	1	$\frac{1}{7}$
S_3	10	6	2	0	0	1	1	$\frac{1}{10}$

نختار المتغير الداخل Y_1 ، المتغير الخارج S_3

$$P.E = \frac{10 \ ,6\ ,2\ ,0\ ,0\ ,1\ ,1}{10}$$

= 1 , 0.6 , 0.2 , 0 , 0 , 0.1 , 0.1

S_1 = 5 , 3 , 7 , 1 , 0 , 0 , 1

\- 5 , 3 , 1 , 0 , 0 , 0.5 , 0.5

---

0 , 0 , 6 , 1 , 0 , -0.5 , 0.5

S_2 = 7 , 9 , 5 , 0 , 1 , 0 , 1

\- 7 , 4.2 , 1.4 , 0 , 0 , 0.7 , 0.7

---

0 , 4.8 , 3.6 , 0 , 1 , -0.7 , 0.3

Z = -1 , -1 , -1 , 0 , 0 , 0 , 0

\+ 1 , 0.6 , 0.2 , 0 , 0 , 0.1 , 0.1

---

0 , -0.4 , -0.8 , 0 , 0 , 0.1 , 0.1

نكون جدول الحل الثاني

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	0	-0.4	-0.8	0	0	0.1	0.1	
S_1	0	0	6	1	0	-0.5	0.5	0.083
S_2	0	4.8	3.6	0	1	-0.7	0.3	0.083
Y1	1	0.6	0.2	0	0	0.1	0.1	0.5

المتغير الداخل = Y_3 ، الخارج = S_1

$$P.E = \frac{0,0,6,1,0,-0.5,0.5}{6}$$

$$= 0,0,1,\frac{1}{6},0,-\frac{1}{12},\frac{1}{12}$$

$$Z = 0, -0.4, -0.8, 0, 0, 0.1, 0.1$$

$$+ \quad 0, 0, 0.8, \frac{2}{15}, 0, \frac{-1}{15}, \frac{1}{15}$$

$$0, -0.4, 0, \frac{2}{15}, 0, \frac{1}{30}, \frac{1}{6}$$

$$S_2 = 0, 4.8, 3.6, 0, 1, -0.7, 0.3$$

$$- \quad 0, 0, 3.6, 0.6, 0, -0.3, 0.3$$

$$0, 4.8, 0, -0.6, 1, -0.4, 0$$

$Y_1 = 1 , 0.6 , 0.2 , 0 , 0 , 0.1 ,0 ,1$

$$- \quad 0 , 0 , 0.2 , \frac{1}{30} , 0 , \frac{-1}{60}, \frac{1}{60}$$

$$1 , 0.6 , 0 , \frac{1}{30} , 0 , \frac{7}{60}, \frac{1}{12}$$

نكون جدول الحل الثالث

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S	Ratio
Z	0	-0.4	0	0.13	0	0.03	0.17	
Y_3	0	0	1	0.17	0	-0.08	0.08	-
S_2	0	4.8	0	-0.6	1	-0.4	0	0
Y_1	1	0.6	0	-0.03	0	0.12	0.08	0.13

المتغير الداخل $= Y_2$ والخارج $= S_2$

$$P.E = \frac{0,4.8,0,-0.6,1,0.4,0}{4.8}$$

$= 0 , 1 , 0 , -0.125 , 0.21 , -0.08 , 0$

$Z = 0 , -0.4 , 0 , 0.13 , 0 , 0.03 , 0.17$

$+ \quad 0 , 0.4 , 0 , -0.05 , 0.084 , -0.03 , 0$

$= \quad 0 , 0 , 0 , 0.08 , 0.08 , 0 , 0.17$

نفس القيمة لأن معامل المتغير الداخل فيها (0) $= Y_3$

$Y_1 = 1 , 0.6 , 0 , -0.03 , 0 , 0.12 , 0.08$

$- \quad 0 , 0.6 , 0 , -0.075 , 0.13 , -0.05 , 0$

$= 1 , 0 , 0 , 0.045 , -0.13 , 0.17 , 0.08$

جدول الحل الرابع :

Basic	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	S_3	R.H.S
Z	0	0	0	0.08	0.08	0	0.17
Y_3	0	0	1	0.17	0	-0.08	0.08
Y_2	0	1	0	-0.125	0.21	-0.08	0
Y_1	1	0	0	0.045	-0.13	0.17	0.08

∴ يكون الحل الأمثل

$$Z = 0.17 \Rightarrow \frac{1}{V} = 0.17 \Rightarrow V = 5.88$$

وهذه هي قيمة المباراة
أما الاستراتيجيات فتكون

$$Y_1 = 0.08 \Rightarrow \frac{q_1}{V} = 0.08 \Rightarrow q_1 = 0.08 * 5.88 = 0.47$$

$$Y_2 = 0 \Rightarrow \frac{q_2}{V} = 0 \Rightarrow q_2 = 0$$

$$Y_3 = 0.08 \Rightarrow \frac{q_3}{V} = 0.08 \Rightarrow q_3 = 0.47$$

وبما أن النموذج الأول والذي كان مخصص للاعب الأول A هو النموذج المقابل للنموذج الثاني المخصص للاعب الثاني B
فإن

$$S_1 = X_1 = 0.08 \Rightarrow P_1 = 0.47$$

$$S_2 = X_2 = 0.08 \Rightarrow P_2 = 0.47$$

$$S_3 = X_3 = 0 \Rightarrow P_3 = 0$$

تطبيقات الحاسوب:

وللتأكد من الحل فإننا نجد حل النموذج باستخدام برنامج (TORA) كالآتي:

حيث يمثل المثال الأخير الحل بطريقة الرسم البياني

LINEAR PROGRAM -- ORIGINAL DATA

Title: game theory

	x1	x2	x3		
Maximize	1.00	1.00	1.00		
Subject to					
(1)	5.00	3.00	7.00	<=	1.00
(2)	7.00	9.00	5.00	<=	1.00
(3)	10.00	6.00	2.00	<=	1.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00		
Upper Bound	infinity	infinity	infinity		
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n		

SIMPLEX TABLEAUS -- (Starting All-Slack Method)

Title: game theory

Iteration 1

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	-1.00	-1.00	-1.00	0.00	0.00	0.00
sx4	5.00	3.00	7.00	1.00	0.00	0.00
sx5	7.00	9.00	5.00	0.00	1.00	0.00
sx6	10.00	6.00	2.00	0.00	0.00	1.00
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.00
sx4	1.00
sx5	1.00
sx6	1.00

Iteration 2

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	-0.40	-0.80	0.00	0.00	0.10
sx4	0.00	0.00	6.00	1.00	0.00	-0.50
sx5	0.00	4.80	3.60	0.00	1.00	-0.70
x1	1.00	0.60	0.20	0.00	0.00	0.10
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.10
sx4	0.50
sx5	0.30
x1	0.10

Iteration 3

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	-0.40	0.00	0.13	0.00	0.03
x3	0.00	0.00	1.00	0.17	0.00	-0.08
sx5	0.00	4.80	0.00	-0.60	1.00	-0.40
x1	1.00	0.60	0.00	-0.03	0.00	0.12
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.17
x3	0.08
sx5	0.00
x1	0.08

Iteration 4

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	0.00	0.00	0.08	0.08	0.00
x3	0.00	0.00	1.00	0.17	0.00	-0.08
x2	0.00	1.00	0.00	-0.13	0.21	-0.08
x1	1.00	0.00	0.00	0.04	-0.13	0.17
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.17
x3	0.08
x2	0.00
x1	0.08

Iteration 4

Basic	x1	x2	x3	sx4	sx5	sx6
z (max)	0.00	0.00	0.00	0.08	0.08	0.00
x3	0.00	0.00	1.00	0.17	0.00	-0.08
x2	0.00	1.00	0.00	-0.13	0.21	-0.08
x1	1.00	0.00	0.00	0.04	-0.13	0.17
Lower Bound	0.00	0.00	0.00			
Upper Bound	infinity	infinity	infinity			
Unrestr'd (y/n)?	n	n	n			

Basic	Solution
z (max)	0.17
x3	0.08
x2	0.00
x1	0.08

TWO PERSON ZERO SUM GAME (LP SOLUTION)

	B1	B2
A1	-2.00	3.00
A2	3.00	-4.00

Optimal Solution:

Value of the game =0.08

Player A's mix:
A1 = 0.58
A2 = 0.42

Player B's mix:
B1 = 0.58
B2 = 0.42

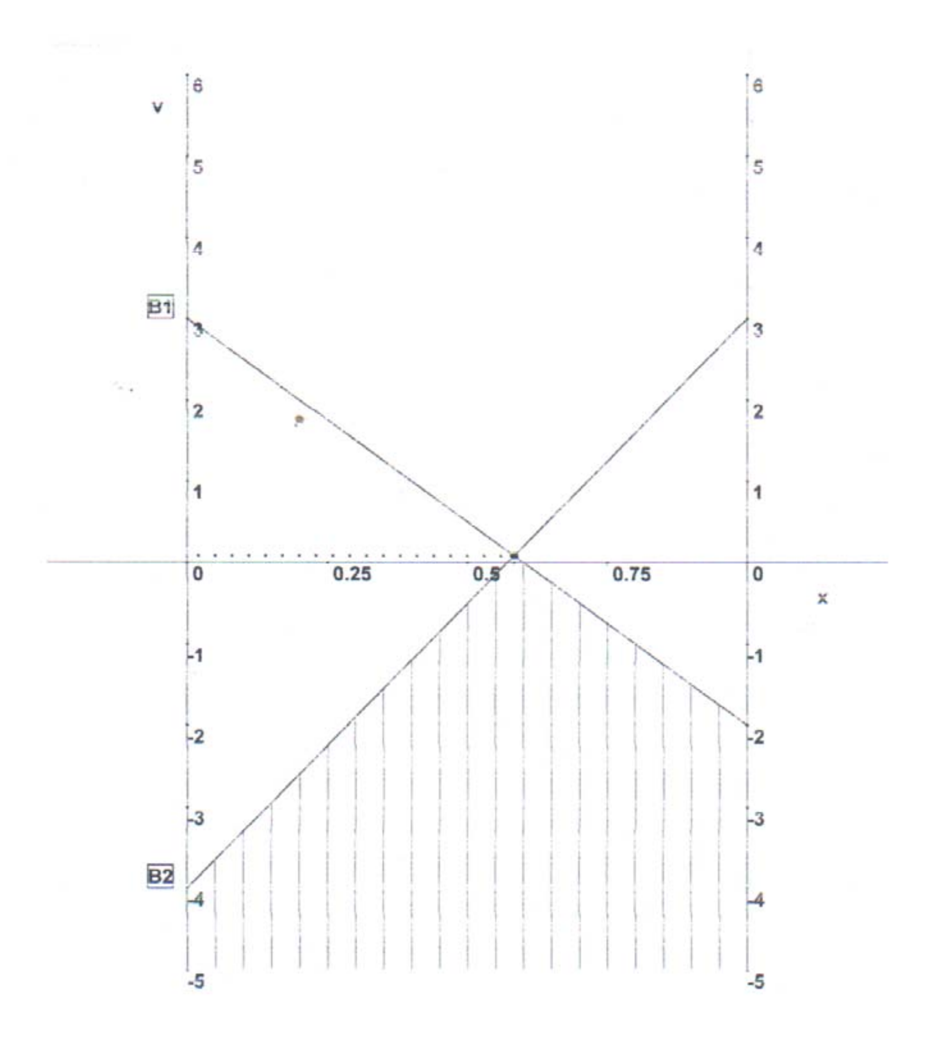
TWO PERSON ZERO SUM GAME (GRAPHICAL SOLUTION)

Title: q1

Player A's Expected Payoffs:

Strategy B1: 3.00 + -5.00x

Strategy B2: -4.00 + 7.00x



تمارين

س(1) أوجد قيمة المباراة ونقطة التوازن إن وجدت لكل من مصفوفات الدفع التالية:

a)

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	2	3	4
X_2	1	5	0

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	6	2	8
A_2	8	9	4	8
A_3	7	5	3	5

c)

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	4	-4	-5	6
X_2	-3	-4	-9	-2
X_3	6	7	-8	-9
X_4	7	3	-9	-5

س(2) أوجد قيمة X,Y التي تجعل مصفوفة الدفع الثانية متوازنة

a)

	b_1	b_2	b_3
a_1	2	4	5
a_2	10	7	X
a_3	4	Y	7

b)

	b_1	b_2	b_3
a_1	50	40	28
a_2	70	45	X
a_3	75	Y	50

س(3) اختزل كل من مصفوفات الدفع التالية إلى مصفوفة 2×2

a)

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	50	40	28
X_2	70	50	45
X_3	75	47.5	50

b)

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	8	10	9	14
A_2	10	11	8	12
A_3	13	12	14	13

س(4) استخدم الطريقة الجبرية في الاستراتيجية المختلطة لايجاد الاستراتيجية المثلى وقيمة المباراة لكل من مصفوفات الدفع التالية:

a)

	Y_1	Y_2	Y_3
X_1	3	-2	4
X_2	-1	4	2
X_3	2	2	6

b)

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
X_1	3	2	4	0
X_2	3	4	2	4
X_3	4	2	4	0
X_4	0	4	0	8

س(5) أوجد الاستراتيجية المثلى وقيمة المباراة لمصفوفات الدفع التالية باستخدام الطريقة البيانية

a)

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6
X_1	1	3	-1	4	2	-5
X_2	-3	5	6	1	2	0

b)

	Y_1	Y_2
X_1	-	6
X_2	4	-5
X_3	-1	-2
X_4	-2	5
X_5	7	-6

س(6) استخدم اسلوب الطريقة المبسطة (البرمجة الخطية) لحل المباريات التالية:

a)

	b_1	b_2	b_3
a_1	9	1	4
a_2	0	6	3
a_3	5	2	8

b)

	b_1	b_2	b_3
a_1	55	40	30
a_2	70	70	55
a_3	75	55	65

س(7) أعد حل السؤال السابق عن برنامج Solver من Excel

س(8) لاعبانA,B يلعبان رمية النقود في الهواء بحيث يرميان القطعة مرتين متتاليتين فاذا:

1- ظهر في رميتين متتاليتين (صورة ، صورة) أو (كتابة ، كتابة) فإن اللاعب A يربح خمس قطع نقدية.

2- ظهر في الرميتين قيمة مختلفة أي (صورة ، كتابة) أو (كتابة ، صورة) فإن اللاعب B يربح قطعة نقد واحدة .

المطلوب: تشكيل مصفوفة الدفع لهذه اللعبة ومن ثم ايجاد قيمة المباراة اذا لم تكن متوازنة بالطريقة الجبرية.

س(9) شركتان A , B ينتجان نفس النوع من المنتجات اذا خططت كل من الشركتين للاعلان عن منتوجاتها في التلفاز بحيث أن الاوقات المسموح بها للاعلان هي الفترات الاعتيادية وهي ثلاثة أوقات (صباحاً، بعد الظهر، مساءً) من كل يوم ، الشركة A تنوي الاعلان عن منتجها في وقتين، بينما الشركة B تنوي الاعلان عنه في وقت واحد لو أن إحدى الشركات قد اعلنت لوحدها في احدى الفترات فإنها تستطيع السيطرة على السوق بالنسبة للذين يراقبون الاعلان في ذلك الوقت، واذا أعلنت الشركتان في نفس الوقت أو لم يعلنان مع بعضهما فإنهما يتقاسمان السوق معاً، اذا فرضنا أن كل مشتري في السوق يراقب التلفاز وقت واحد فقط في اليوم، وأن 60% يراقبون التلفاز مساءً و 30% بعد الظهر 10% صباحاً.
أوجد الاستراتيجية المثلى للشركتين ونسب اقتسامهما السوق.

الوحدة الثامنة

نظرية صفوف الانتظار

Queuing Theory

الوحدة الثامنة

نظرية صفوف الانتظار

Queuing Theory

مقدمة :

من الأمور المهمة في حياتنا الوقوف في الطوابير مثل الوقوف في طوابير الخبز أو طوابير المواصلات، نمر في حياتنا بالكثير من هذه الطوابير ونتمنى دائما أن لا يكون هناك أي صف من صفوف الانتظار التي تشكل ازعاجاً كبيراً لنا وخصوصاً اذا طال الانتظار في هذه الصفوف بدأ التفكير في حل مشكلة صفوف الانتظار في عام 1909 عندما كان هناك مكالمات هاتفية كثيرة ولم تستطيع عاملات البدالة تقديم الخدمة بشكل مناسب وهذا كان يشكل معضلة كبيرة بالنسبة لشركة الهاتف آن ذاك، ففكر أحد المهندسين في الشركة وهو المهندس الدانمركي إرلانك A. K. Erlang حيث حسب مدة التأخير للعاملة الواحدة على العاملات الاخريات، وبقي الامر مقتصراً على الهواتف حتى نهاية الحرب العالمية الثانية حيث بدأ التفكير في نواحي أخرى لصفوف الانتظار وما زالت نظرية صفوف الانتظار في تطور مستمر حتى الآن.

ومن الأمثلة على صفوف الانتظار ، الانتظار في عيادة طبيب لحين المعالجة والدخول على الطبيب، انتظار البواخر في الموانئ من أجل التفريغ أو الشحن من على ارصفة الشحن، انتظار الطائرات على مدرج المطار للاقلاع وغيرها الكثير من الأمثلة على صفوف الانتظار.

مكونات صف الانتظار

يتكون صف الانتظار من عناصر أساسية هي:

1- الوحدات: أي العملاء أو طالبي الخدمة وفي بعض الأحيان يسمون واصلي الخدمة.

2- صف الانتظار: ويتكون من عدد من العملاء الذين ينتظرون تقديم الخدمة لهم.

3- مركز الخدمة: وهي الموظف أو الآلة المكلفة بتقديم الخدمة للعملاء.

4- المخرجات: وهي مغادرة العملاء بعد تلقيهم الخدمة من مركز الخدمة.

خصائص صفوف الانتظار

1- قاعدة تقديم الخدمة : هناك طريقتين لتقديم الخدمة

أ- من يصل أولاً يخدم أولاً First – come first service (FCFS)

ب- من يصل أخراً يخدم أولاً Last – come first service (LCFS)

2- توزيع الوصول (λ) : حيث يتم توزيع طالبي الخدمة (الوحدات) أو الفترات الزمنية بين الوصول والآخر.

3- قنوات الخدمة: وهي طاقة تقديم الخدمة: وهي القدرة على تقديم الخدمة للعملاء بشكل جيد وبأسرع وقت ممكن ويمكن أن يكون هناك قناة خدمة واحدة أو عدة قنوات خدمة.

4- توزيع معدلات المغادرة: وهي معدلات تقديم الخدمة ومغادرة مركز الخدمة للعملاء ضمن وحدة زمن معينة.

نماذج صفوف الانتظار :

أولاً: صف الانتظار الواحد ومركز الخدمة الواحد

في هذا النموذج تمر جميع الوحدات المخدومة على مركز خدمة واحد فقط، ولغرض وضع نموذج لخط الانتظار يجب تحديد بعض خصائص هذا النظام وهي:

1- توزيع الوصول

2- توزيع وقت الخدمة

3- خط الانتظار

1- توزيع الوصول

أي تحديد عدد الوحدات الواصلة إلى مركز الخدمة وفي وحدة زمنية معينة. وفي معظم الأحيان يكون الوصول عشوائياً وبالتالي يصعب وضع نمط معين للوصول ولذلك فإن أفضل توزيع لاحتمالات الوصول هو توزيع بواسون حيث يكون احتمال الوصول لعدد من الوحدات هو:

$$P(x) = \frac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{X!} \quad , \quad x = 0 , 1 , 2 , 3 \ldots\ldots$$

حيث:

X : عدد الوحدات الواصلة خلال الفترة الزمنية

λ : المعدل المتوقع للواصلين خلال الفترة الزمنية

e : العدد النيبري وهو قيمة ثابتة هي 2.718

2- توزيع وقت الخدمة: أي الزمن المستغرق لتأدية الخدمة، وفي هذه الحالة يستخدم التوزيع الأسي لنموذج توزيع جيد لوقت الخدمة ويتم توزيعه كالآتي:

$$f(x) = \mu e^{-\mu_x} \quad , \quad x \geq 0$$

حيث:

x : زمن تقديم الخدمة

μ : عدد الوحدات المخدومة خلال فترة زمنية

e : العدد النيبري

ويكون احتمال تأدية الخدمة خلال فترة زمنية t هي :

$$P(x \leq t) = 1 - e^{-\mu_t}$$

3- **خط الانتظار:** وبها يتم تحديد طريقة تقديم الخدمة حسب قاعدة تقديم الخدمة المشروح سابقاً.

مثال:

اذا كان رصيف أحد الموانيء يستوعب سفينة واحدة فقط للشحن أو التفريغ، وقد لاحظ المسؤول عن الميناء في مرات عديدة وقوف خمس سفن في انتظار الشحن أو التفريغ. ولذلك فكر هذا المسؤول في وضع بدائل لتقليل وقت الانتظار عن طريق تطوير عملية الشحن والتفريغ. وقد اقترح بديلين لذلك هما:

البديل الأول: تسريع عملية التفريغ والشحن من خلال زيادة عدد آليات التفريغ والشحن.

البديل الثاني: اضافة رصيف آخر وطاقم آخر للتفريغ والشحن بحيث يتم تقديم الخدمة لسفينتين معاً.

فإذا كان معدل وصول السفن (21) سفينة في الأسبوع، ضع نموذج لخط الانتظار.

الحل:

بما أن معدل وصول الشاحنات يقع بمعدل 21 سفينة في الأسبوع أي 3 سفن في اليوم وبما أن الوصول عشوائياً نستخدم توزيع بواسون حيث (λ=3) واحتمالات الوصول في اليوم هي (3 ,2 , 1 , 0) :

$$P(X = 0) = \frac{3^0 e^{0-3}}{0!} = e^{-3} = 0.0498$$

وهذا احتمال عدم وصول أي سفينة في اليوم

$$P(X = 1) = \frac{3^1 e^{-3}}{1!} = 3e^{-3} = 0.1494$$

وهذا احتمال وصول سفينة واحدة في اليوم

$$P(X = 2) = \frac{3^2 e^{-3}}{2!} = 0.224$$

وهذا احتمال سفينتين في اليوم

$$P(X = 3) = \frac{3^3 e^{-3}}{3!} = 0.112$$

وهذا احتمال وصول ثلاثة سفن في اليوم

على فرض أن عمال الشحن والتفريغ يستطيعون خدمة 4 سفن في اليوم فإن احتمالات الخدمة هي:

$P(X < t) = 1 - e^{-4t}$

فإذا كان عدد ساعات العمل اليومي هو 10 ساعات عمل فإن احتمال تأدية الخدمة خلال ساعة واحدة هو = t 0.1

$P(X \leq 0.1) = 1 - e^{-4(0.1)} = 0.33$

وخلال ثلاثة ساعات أي t = 0.3 هو

$P(X \leq 0.3) = 1 - e^{-4(0.3)} = 0.6988$

وخلال خمس ساعات هو

$P(X \leq 0.5) = 1 - e^{-4(0.5)} = 0.865$

الجدول التالي يمثل القوانين الرياضية المستخدمة في صف الانتظار الواحد وماذا تعني:

تفسير القانون	القانون
توزيع اوقات الوصول	$P(X) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{X!}$
احتمال تقديم الخدمة في زمن محدد t	$P(X \leq t) = 1 - e^{-\mu t}$
متوسط الفترة التي يكون فيها النظام مشغولاً (معامل الاستخدام)	$P = \frac{\lambda}{\mu}$
احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام	$P_0 = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)$

احتمال وجود n وحدة في النظام	$P_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \quad P_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$
معدل عدد الوحدات الموجودة في النظام	$L_s = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$
معدل عدد الوحدات الموجودة في صف الانتظار	$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)} = L_s - \frac{\lambda}{\mu}$
معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في النظام	$W_s = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{L_s}{\lambda}$
معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار	$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{L_q}{\lambda} = W - \frac{1}{\mu}$

وبتطبيق هذه القوانين على مثالنا السابق نحصل على :

معامل الاستخدام

$$P = \frac{3}{4} = 0.75$$

أما احتمال عدم وجود أي وحدة في النظام فإن

$$P_0 = \left(1-\frac{3}{4}\right) = 0.25$$

واحتمال وجود خمس سفن في النظام هو

$$P_5 = (0.75)^5 * 0.25 = 0.0593$$

معدل عدد السفن الموجودة في النظام

$L_s = \frac{3}{4-3} = 3$ سفن

معدل عدد السفن الموجودة في صف الانتظار هو

$Lq = 3 - \frac{3}{4} = 2.25$ سفينة

معدل الوقت الذي تستغرقه السفينة في النظام هو

$W_s = \frac{3}{3} = 1$ day يوم

معدل الوقت الذي تستغرقه السفينة في صف الانتظار

$W_q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0.75$ day يوم لكل سفينة

$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{2.25}{3} = 0.75$

يلاحظ من خلال هذه النتائج أن كل سفينة عليها الانتظار (0.75) من اليوم لكي يتم تفريغها أو شحنها فإذا كانت مدة العمل في اليوم (10) ساعات فإن كل شاحنة ستنتظر (7.5) ساعة حتى يتم خدمتها وعدد السفن الموجودة في صف الانتظار هو (2.25) سفينة ولكن اذا استخدمت البديل الأول المقترح وهو زيادة الآليات وتسريع الخدمة فإن الاحتمالات تكون كالآتي:

النتائج الأولى كانت اذا كانت معدل الخدمة μ=n فإذا رفعنا معدل الخدمة إلى μ=6 فإن النتائج تصبح , λ=3 μ=6

$P = \frac{3}{6} = 0.5$

$P_0 = 1 - 0.5 = 0.5$

$L_s = \frac{3}{6-3} = 1$

$L_q = 1 - \frac{3}{6} = 0.5$

$W_s = \frac{1}{3} = 0.33$

$W_q = 0.33 - \frac{1}{6} = 0.167$

وهنا نلاحظ أن كل سفينة عليها الانتظار 1.67 ساعة لكي تتم خدمتها

أما إذا رفعنا معدل الخدمة إلى (8) أي μ=8 , λ=3 فإن

$$P = \frac{3}{8} = 0.375$$

$$P_0 = 1 - 0.375 = 0.625$$

$$L_s = \frac{3}{8-3} = 0.6$$

$$L_q = 0.6 - \frac{3}{8} = 0.225$$

$$W_s = \frac{0.6}{3} = 0.2$$

$$W_q = 0.2 - \frac{1}{8} = 0.0.75$$

أي أن كل سفينة ستنتظر 0.075 يوم أي 0.75 ساعة كي يتم خدمتها

ومن هنا نرى أننا كلما زدنا من سرعة تقديم الخدمة فإن وقت الانتظار يقل، وعليه فإن هذا البـديل سـيكون هـو بديل جيد لتقديم الخدمة الأفضل.

واذا أردنا اختبار البديل الثاني فسيكون بالطريقة الثانية وهي:

ثانياً: مركز الخدمة المتعددة في صف الانتظار

في هذا النظام يكون هناك اكثر من مركز خدمة وعليه فإن تعريف المصطلحات يكون

K = عدد مراكز الخدمة

λ = معدل الواصلين للنظام

μ = معدل الخدمة لكل مركز

أما القوانين فتكون:

احتمال عدم وجود وحدات في النظام

$$P0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{n-1} \frac{1}{n!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\right] + \frac{1}{K!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mu} \frac{K\mu}{K\mu - \lambda}} \quad , \qquad K\mu > \lambda$$

واذا فرضنا ان $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ فإن القانون يصبح

$$P_0 = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{k-1} \frac{1}{n!}\rho^{n}\right] + \frac{1}{K!}\rho^{n} \frac{K\mu}{K\mu - \lambda}}$$

احتمال وجود n وحدة في النظام

$$P_n = \frac{1}{K!K^{n-k}}\rho^{n}P_0 \qquad n > K$$

$$= \frac{1}{n!}\rho^{n}P_0 \qquad n \leq K$$

ومعدل عدد الوحدات في النظام هو:

$$L_s = \frac{\lambda\mu\rho^{k}}{(K-1)!(K\mu - \lambda)^{2}}P_0 + \rho$$

معدل عدد الوحدات في صف الانتظار

$$L_q = L_s - \rho$$

معدل الوقت المستغرق في النظام

$$W_s = \frac{\mu\rho^{k}}{(K-1)!(K\mu - \lambda)^{2}}P_0 + \frac{1}{\lambda} = \frac{L}{\lambda} \Rightarrow L_s = \lambda W_s$$

معدل الوقت الذي تستغرقه الوحدة في صف الانتظار

$$W_q = Ws - \frac{1}{\mu} = \frac{L_q}{\lambda} \Rightarrow L_q = \lambda W$$

احتمال أن الوحدة الواصلة للنظام يجب أن تنتظر في الصف

$$P_w = \frac{1}{K!}\rho^k \frac{K\mu}{K\mu - \lambda} P_0$$

وفي مثالنا السابق اذا قرر المسؤول زيادة عدد الارصفة لتصبح 2 فتكون القيم عندنا كالآتي:

$\lambda = 3$, $\mu = 4$, $K = 2$

وعليه فإن

$$\rho = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$Po = \frac{1}{\left[\sum_{n=0}^{1} \frac{1}{n!}(0.75)^n\right] + \frac{1}{2!}(0.75)^2 \frac{(2)(n)}{(2)(n) - 3}}$$

$$= \frac{1}{(1.75) + 0.45} = 0.45$$

$$Ls = \frac{(3)(4)(0.75)^2}{(2-1)!(2*4-3)^2} (0.45) + 0.75 = 0.8715$$

$$Lq = 0.8715 - 0.75 = 0.1215$$

$$Ws = \frac{0.8715}{3} = 0.2905$$

$$Wq = 0.2905 - \frac{1}{4} = 0.0405$$

$$Pw = \frac{1}{2!}(0.75)^2 \frac{(2)(4)}{(2)(4) - 3} .0.45$$

$$= 0.2025$$

ونلاحظ من خلال اضافة رصيف شحن آخر إلى معدل الانتظار السفينة للتفريغ انخفض إلى 0.0405 يوم أي 0.405 ساعة أي 24.3 دقيقة وايضاً انخفاض نسبة السفن التي تكون بانتظار الخدمة إلى 0.2025 بدلا من 0.75

وايضا انخفاض معدل وقت بقاء السفينة في الانتظار والتفريغ من يوم واحد إلى 0.2905 يوم أي إلى 2.905 ساعة .

ولكن لتحديد البديل الافضل ضمن هذين البديلين يجب دراسة تكلفة كل بديل وافضل بديل يكون البـديل الاقـل كلفة.

مثال:

مكتب صندوق بريد بة ثلاثة شبابيك، تصل الزبـائن إلى المكتـب بمعـدل زبـون لكـل (30) ثانيـة تسـتغرق خدمـة الزبون 1.25 دقيقة، مدة بقاء الزبون في النظام (3) دقائق، ما هو عدد الزبائن في النظـام ومـا هـي المـدة الزمنيـة التي يبقى بها موظفو البريد بدون عمل أي الفترة الزمنية بين الخدمة والأخرى.

المعطيات $\lambda = 2$ Customers / min

عدد الخانات = 3 $Ws = 1.25$ min

الحل :

$W = 3$ min

$$\mu = \frac{1}{Ws} = \frac{1}{1.25} = 0.8 \text{ Customer / min}$$

$Ls = \lambda w_s = (2)\ (1.25) = 2.5$ Customer

$Wq = W - Ws = 3 - 1.25 = 1.75$ min

$Lq = \lambda wq = (2)\ (1.75) = 3.5$ Customer

$$Pw = 1 - \frac{Ls}{3} = 1 - \frac{2.5}{3} = 0.17 = 17\%$$

∴ يكون عدد الزبائن في النظام هو (3.5) زبون بينما يبقى موظفو البريد ما نسبة 17% من الزمن بدون عمل.

مثال:

غرفة الطوارئ في مستشفى البشير الحكومي تقدم مساعدة طبية سريعة للمرضى الواردين لها سواء بسيارات الاسعاف أو بسياراتهم الخاصة، وفي أي ساعة من اليوم يكون هناك طبيب مناوب في الطوارئ لكن نظراً لازدياد عدد المرضى الواصلين إلى المستشفى فقد كان على المريض أن ينتظر لفترة حتى يقدم له العلاج وخصوصاً في ساعات المساء الباكر، لذلك اتخذت الادارة قراراً بتكليف طبيب آخر ليناوب مع الطبيب الأول في هذه الفترة. وبذلك يقدم العلاج لحالتان مرضيتان في نفس الوقت، لكن المدير الاداري للمستشفى قرر دراسة هذه الحالة عن طريق صفوف الانتظار، وقد لاحظ أن وصول المرضى إلى غرفة الطوارئ بشكل عشوائي وبمعدل مريض كل نصف ساعة، ويستغرق الطبيب في معالجته 20 دقيقة، فهل القرار المتخذ يخفض من انتظار المريض بشكل جيد أم لا.

الحل:

$\lambda = 2 \quad , \quad \mu = 3 \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}$

ولايجاد الفرق بين وجود طبيب وواحد أو اثنين نستخدم الجدول.

	n = 1	n = 2
ρ	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Po	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
Ls	2	$\frac{3}{4}$
Lq	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{12}$
Ws	1	$\frac{3}{8}$

Wq	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{24}$
P(Wq > 0)	0.667	0.167
$P(Wq > \frac{1}{2})$	0.404	0.022
P(Wq > 1)	0.245	0.003

نلاحظ من الجدول أن وقت الانتظار للمريض في صف الانتظار قد قل بوجود طبيب اخر من $\frac{2}{3}$ ساعة إلى $\frac{1}{24}$ ساعة وأن عدد المرضى في صف الانتظار قد قل من $\frac{4}{5}$ مريض إلى $\frac{1}{12}$ مريض في الساعة.

$\therefore$ يكون القرار الأمثل هو تعيين طبيب آخر.

تطبيقات الحاسوب :

نتأكد من الحل باستخدام برنامج TORA للمثالين الأول والثاني كالآتي:

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

الأحد، سبتمبر ٢١، ٢٠٠٨ ١٢:٠٢

QUEUEING OUTPUT ANALYSIS

Title: ex1
Comparative Analysis

Scenario	c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	1	3.00000	4.00000	3.00000	0.25000	3.00000	2.25000	1.00000	0.75000

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

الأحد، سبتمبر ٢١، ٢٠٠٨ ١٢:٠٤

QUEUEING OUTPUT ANALYSIS

Title: ex2
Comparative Analysis

Scenario	c	Lambda	Mu	L'da eff	p0	Ls	Lq	Ws	Wq
1	2	2.00000	3.00000	2.00000	0.50000	0.75000	0.08333	0.37500	0.04167

تمارين

س(1) في محطة فحص السيارات في المنطقة الحرة الأردنية اذا كان وصول السيارات إلى المحطة بشكل عشوائي يخضع لتوزيع بواسون بمعدل وصول 20 سيارة في الساعة الواحدة، وأن الفاحص يستطيع فحص بمعدل 25 سيارة في الساعة فإذا كانت الازمنة تخضع للتوزيع الأسي. المطلوب:

أ- حساب احتمال أن يكون هناك (10) سيارات في محطة الفحص في لحظة معينة.

ب- حساب النسبة المتوقعة للزمن الذي يكون فيه الفاحص عاطلاً عن العمل

ج- حساب المعدلات Ls , Lq , Ws , Wq

د- ما هو تأثير اضافة محطة فحص ثانية على وقت الانتظار وعلى عدد السيارات في الانتظار.

س(2) اذا كان وصول الطائرات إلى مطار عمان المدني يخضع لتوزيع بواسون بواقع (5) طائرات في الساعة وأن عملية تفريغ أو تحميل الطائرة من الركاب تأخذ في المتوسط نصف ساعة فاحسب

أ- احتمال أن يكون هناك طائرتان في الانتظار من اجل التفريغ أو التحميل في لحظة زمنية معينة.

ب- حساب وقت الانتظار للطائرة وعدد الطائرات في الانتظار في الساعة.

ج- اذا اضيف خطي تفريغ وتحميل آخرين فما هو تأثير هذه الاضافة على وقت الانتظار للطائرات.

س(3) يعمل قسم التصوير في كلية العلوم الادارية في جامعة البترا على خدمة خمسة اقسام تعليمية وعمادة الكلية فإذا كانت مهمات التصوير التي تأتي اليه تخضع لتوزيع بواسون بمعدل (8) مهمات في الساعة، وتستطيع الالة تصوير (5) مهمات في الساعة، وقد وجد أن الالة لا تكفي لتلبية الطلبات مما أدى إلى ظهور صفوف انتظار لذلك، وقد اقترح على استخدام آلة أخرى ليصبح عدد المهمات المقدمة 12 مهمة في الساعة، فهل هذا القرار يخفض نسبة الانتظار في المهمات أم استقدام آلة اكبر تستطيع تصوير 10 مهمات في الساعة أفضل.

س(4) في محطة للقطارات اذا كان هناك شباك تذاكر واحد فإذا كان وصول الزبائن إلى الشباك يخضع لتوزيع بواسون بمعدل (5) زبون في الساعة ويستطيع الموظف قطع 20 تذكرة في الساعة ولكن لوحظ أن هناك عدد من الزبائن يكونون صف انتظار في لحظة معينة. وكان هناك اقتراحات مقدمان إلى ادارة السكة الحديد.

أ- استخدام آلة لقطع التذاكر بسرعة 25 تذكرة في الساعة.

ب- تعيين موظف آخر لمساعدة الموظف الأول .

أي البديلين أفضل من ناحية سرعة تقديم الخدمة وعدد الزبائن في صف الانتظار.

س(5) يوجد في أحد البنوك التجارية أربعة صناديق (نوافذ) لتقديم الخدمة للزبائن بشكل متوازي، فإذا كان وصول العملاء إلى البنك يخضع لتوزيع بواسون بمعدل 28 عميل في الساعة ويستطيع الموظف خدمة 8 عملاء في الساعة الواحدة، فإذا كان المدير يرغب في ايجاد طريقة لتخفيض وقت الانتظار للعميل، ولذلك قرر اعادة ترتيب صفوف الانتظار الاربعة السابقة أمام النوافذ ليجعلها صف واحد يقف فيه العملاء ثم ينتقلون إلى النافذة الفارغة للحصول على الخدمة. فهل هذا القرار يقلل فعلاً وقت الانتظار أم لا .

الوحدة التاسعة

سلاسل ماركوف

Markov Chains

الوحدة التاسعة

سلاسل ماركوف

Markov Chains

مقدمة :

يرجع اسم هذه السلاسل ماركوف إلى العالم الروسي الذي طور هذه السلاسل عام 1905 وهو اندريه ماركوف Andrei A. Marcov وأساس هذا الأسلوب هو التنبؤ بقيمة مستقبلية من خلال قيمة حالية. والذي يساعد على تحليل رياضي للاحداث التي تظهر متتابعة زمنياً والذي يخضع لتحليل باستخدام الاحتمالات والذي يسمى عملية احتمالية Stochastic Process وعليه فإن عمليات ماركوف هي نوع خاص من العمليات الاحتمالية.

ولقد طور تحليل ماركوف ليستخدم على نطاق أعم من التحليل والتنبؤ بالسلوك فقد استخدم كوسيلة لاتخاذ السلع في السوق وتخطيط المبيعات ومشاكل التخزين وصيانة الآلات ... الخ

سلسلة ماركوف :

العمليات الاحتمالية تسمى عمليات ماركوف اذا كانت تعتمد على الاحداث الحالية فقط. وهذا يعني أن لمجموعة من الزمن to, t , … , tn مجموعة المتغيرات العشوائية $\{X_{tn}\} = \{X_1 , X_2 , \dots , X_n\}$ تسمى عمليات ماركوف اذا تحققت الخاصية

$$P \{X_{tn} = X_n \mid X_{tn-1} = X_{n-1} , \dots , X_0 , = X\}$$

وهذه تسمى خاصية ماركوف

ويمكن كتابة الاحتمال على الصورة

$$P_{ij} = P \{ X_t = j \mid X_{t-1} = i \} \qquad (i , j) = 1, 2, \dots , n , t = 0 , 1 , \dots, T$$

حيث سيكون

$$\sum_{j} P_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$1 \geq P_{ij} \geq 0 \qquad (i, j) = 1, 2, \dots, n$$

ويمكن كتابتها على شكل مصفوفة كالآتي:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ : & : & : & : \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix}$$

المصفوفة P أيضاً تسمى سلسلة ماركوف ولها خاصية في أن جميع خواص المصفوفة P_{ij} ثابتة وتعتمد على الـزمن. ويمكن أن تكون سلسلة ماركوف سلسلة لا نهائية ولكننا سنقتصر في دراستنا هذه على السلاسل المنتهية.

مثال:

في مدينة ما ثلاثة مصانع آلبان A , B , C فإذا كان عدد الزبائن في هذه المدينـة 1000 زبـون مـوزعين عـلى الثلاثـة مصانع وكما هو معروف فإن الزبائن تنتقل من مصنع لآخر حسب الجودة والسعر. اذا كان نسـبة توزيـع الزبـائن على المصانع الثلاثة هي A=25% , B=45% , C=30% ، والجـدول التـالي يوضـح عـدد الزبـائن لكـل مصـنع وعـدد الكسب والخسارة لكل مصنع في الفترة الأولى (الشهر الأول) والفترة الثانية (الشهر الثاني)

اكتب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية (P) ثم حلل المسألة

المصنع	الشهر الاول	التغيرات خلال الفترة		الشهر الثاني
		الكسب	الخسارة	
A	250	62	50	262
B	450	53	60	443
C	300	50	55	295
المجموع	1000	165	165	1000

الحل:

نحسب أولاً احتمالات الزبائن المتبقين لكل مصنع وذلك بحساب عدد الزبائن المتبقين بعد الخسارة وقسمه هذا العدد على عدد الزبائن في الفترة الأولى.

وذلك كما في الجدول

احتمال الزبائن المتبقين	الزبائن المتبقين	عدد الخسارات	عدد الزبائن في الشهر الأول	المصنع
$\frac{200}{250}=0.8$	200	50	250	A
$\frac{390}{450}=0.867$	390	60	450	B
$\frac{245}{300}=0.817$	245	55	300	C

ثانياً: نحسب احتمالات الكسب والخسارة

نكون جدول كسب وخسارة افتراضي بناءً على جدول الكسب والخسارة الاول وذلك كالآتي:

مصفوفة الخسارة

المجموع	C	B	A	
50	25	25	0	A
60	25	0	35	B
55	0	28	27	C

مصفوفة الكسب

	A	B	C	المجموع
A	0	35	27	62
B	25	0	28	53
C	25	25	0	50

أما مصفوفة الاحتمالات الانتقالية فتكون

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{200}{250} & \frac{25}{250} & \frac{25}{250} \\ \frac{35}{450} & \frac{390}{450} & \frac{25}{450} \\ \frac{27}{300} & \frac{28}{300} & \frac{245}{300} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\therefore P = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.08 & 0.867 & 0.056 \\ 0.09 & 0.093 & 0.817 \end{pmatrix} \end{array}$$

احتمالات الكسب المتبقي

احتمالات الخسارة والمتبقي

من خلال مصفوفة الاحتمالات الانتقالية نرى أن

1- المصنع A احتفظ بـ 80% من زبائنه وخسر 10% للمصنع B و 10% للمصـنع C بيـنما كسـب 8% مـن المصنع B و 9% من المصنع C .

2- المصنع B احتفظ بـ 86.7% من زبائنه وخسر 8% للمصـنع A و 5.6% للمصـنع C وكسـب 10% مـن المصنع A و 9.3% من المصنع C

3- المصنع C احتفظ بــ 81.7% مـن زبائنـه وخسر 9% للمصـنع A 9.3% للمصـنع B وكسـب 10% مـن المصنع A و 5.6% من المصنع B

أما نسب الزبائن للشهر الثاني فتكون

A = 26.2% , B = 44.3% , C = 29.5%

ولحساب نسب الزبائن للشهر الثالث نغير مصفوفة النسب للشهر الثاني في مصفوفة الاحتمالات الانتقالية فتكون

$$[0.262 \quad 0.443 \quad 0.245] \begin{bmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ 0.08 & 0.867 & 0.056 \\ 0.09 & 0.093 & 0.817 \end{bmatrix}$$

∴ تكون النسب المحتملة للشهر الثاني كالآتي :

A = 27.2% , B = 43.8% , C = 29.2%

ولحساب النسب للشهر الرابع أي التنبؤ الثالث نربع مصفوفة الاحتمالات الانتقالية ونضربها في مصـفوفة النسـب للشهر الثاني . أي

$$[0.262 \quad 0.443 \quad 0.295] P^2$$

وبشكل عام فإن احتساب التنبؤ السنوي هو

$$[0.262 \quad 0.443 \quad 0.295] P^{n-1}$$

مثال:

ثلاثة أصناف من العصير هي A , B , C من انتاج ثلاثة شركات مختلفة وكانت اعداد الزبـائن في شـهر اذار واعـداد الكسب والخسارة والاعداد المتبقية هي كما في الجدول

الصنف	شهر آذار	الكسب	الخسارة	شهر نيسان
A	220	30	50	200
B	220	25	30	215
C	270	50	25	295
المجموع	710	105	105	710

أما مصفوفة الخسارة فهي

	A	B	C	المجموع
A	0	20	30	50
B	10	0	20	30
C	20	5	0	25

المطلوب: حساب نسبة كل صنف من الأصناف في شهري أيار وحزيران

الحل:

احتمالات الاحتفاظ بالزبائن لكل صنف من الاصناف هو

الصنف	عدد المتبقين	احتمال الاحتفاظ
A	170	$\frac{170}{220} = 0.773$
B	190	$\frac{190}{220} = 0.864$
C	245	$\frac{245}{270} = 0.907$

نكتب مصفوفة الاحتمالات الانتقالية من مصفوفة الخسارة

$$\therefore P = \begin{matrix} & A & B & C \\ A & 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ B & 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ C & 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{matrix}$$

احتمالات الكسب المتبقي (↓)

احتمالات الخسارة والمتبقي (→)

أما نسب الزبائن لشهر نيسان فهي

A = 0.282 , B = 0.303 , C = 0.415

أما نسب الزبائن لشهر أيار فتكون

$$\begin{bmatrix} 0.282 & 0.303 & 0.415 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.262 & 0.295 & 0.442 \end{bmatrix}$$

فتكون النسب كالآتي :

A = 26.2% , B = 29.5% , C = 44.2%

ولحساب النسب لشهر حزيران نربع مصفوفة الاحتمالات الانتقالية أولاً

$$\begin{bmatrix} 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.612 & 0.151 & 0.237 \\ 0.08 & 0.752 & 0.168 \\ 0.125 & 0.041 & 0.834 \end{bmatrix}$$

ثم نضرب نسب شهر نيسان فيها

$$\begin{bmatrix} 0.282 & 0.303 & 0.415 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.612 & 0.151 & 0.237 \\ 0.08 & 0.752 & 0.168 \\ 0.125 & 0.041 & 0.834 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.249 & 0.287 & 0.464 \end{bmatrix}$$

فتكون النسب كالآتي:

A = 24.9% , B = 28.7% , C = 46.4%

حالة التوازن : Steady State Probabilities (Equilibrium Condition)

اذا كانت مصفوفة النسب لسلسلة ماركوف هي

$S = [\ S_1 \quad S_2 \ \ldots\ldots\ldots \ S_n\ ]$

وكانت P مصفوفة الاحتمالات الانتقالية، فإن شرط التوازن هو :

$S.P = S$

$\sum S_i = 1$

أي

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \ldots\ldots & S_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \ldots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \ldots & P_{2n} \\ : & : & : & : \\ P_{n1} & P_{n2} & \ldots & P_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \ldots & S_n \end{bmatrix}$$

مثال:

جد نسب التوازن للمثال السابق

الحل:

مصفوفة نسب التوازن هي $S = [S_1 \quad S_2 \quad S_3]$

ومصفوفة الاحتمالات الانتقالية هي

$$P = \begin{bmatrix} 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{bmatrix}$$

$S_1 + S_2 + S_3 = 1$ ……………………… (1)

$$[S_1 \quad S_2 \quad S_3] \begin{bmatrix} 0.773 & 0.091 & 0.136 \\ 0.045 & 0.864 & 0.091 \\ 0.074 & 0.018 & 0.907 \end{bmatrix} = [S_1 \quad S_2 \quad S_3]$$

$0.773\ S_1 + 0.045\ S_2 + 0.074\ S_3 = S_1$ …………. (2)

$0.091\ S_1 + 0.864\ S_2 + 0.018\ S_3 = S_2$ ………….. (3)

$0.136\ S_1 + 0.091\ S_2 + 0.907\ S_3 = S_3$ ………….. (4)

من المعادلة (1) نجد

$S_3 = 1 - S_1 - S_2$ …………. (1)

نعوضها في المعادلة (2) فتكون

$0.773\ S_1 + 0.045\ S_2 + 0.074\ (1 - S_1 - S_2\ ) = S_1$

$0.773\ S_1 + 0.045\ S_2 + 0.074 - 0.074\ S_1 - 0.074\ S_2 - S_1 = 0$

$-\ 0.301\ S_1 - 0.029\ S_2 = -0.074$

$0.301\ S_1 + 0.029\ S_2 = 0.074$

$\Longrightarrow 0.029\ S_2 = 0.074 - 0.301\ S_1$

$S_2 = 2.552 - 10.379\ S_1$ ………………….. (2)

نعوض (1) في المعادلة الثالثة ثم بعدها نعوض (2)

$0.091\ S_1 + 0.864\ S_2 + 0.018\ (1 - S_1 - S_2) = S_2$

$0.091\ S_1 + 0.864\ S_2 + 0.018 - 0.018\ S_1 - 0.018\ S_2 - S_2 = 0$

$0.073\ S1 - 0.154\ S2 = -0.018$

والآن نعوض (2) في هذه المعادلة فتكون

$0.073\ S_1 = 0.154\ (2.552 - 10.379\ S_1) = -0.018$

$0.073\ S_1 = 0.393 + 1.598\ S_1 = -0.018$

$1.671\ S_1 = 0.375$

$\therefore S_1 = 0.224$

$S_2 = 2.552 - (10.379)\ (0.224)$

$= 2.552 - 2.325$

$S_2 = 0.227$

$S_3 = 1 - 0.224 - 0.227 = 0.549$

مثال:

أوجد نسب التوازن لمصفوفة الاحتمالات الانتقالية التالية:

$$P = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix}$$

الحل:

$S = [\ S_1 \quad S_2 \quad S_3\ ]$

$S1 + S2 + S3 = 1$ …………………….. (1)

$$\begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.3 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \\ 0.05 & 0.4 & 0.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 \end{bmatrix}$$

$0.3\ S_1 + 0.1\ S_2 + 0.05\ S_3 = S_1$ ………………… (2)

$0.6\ S_1 + 0.6\ S_2 + 0.4\ S_3 = S_2$ ………………….. (3)

$0.1\ S_1 + 0.3\ S_2 + 0.55\ S_3 = S_3$ ………………… (4)

من المعادلة (1)

$S_3 = 1 - S_1 - S_2$ …………………… (1)

نعوضها في المعادلة (2)

$0.3\ S_1 + 0.1\ S_2 + 0.05\ (1 - S_1 - S_2) = S_1$

$\Longrightarrow -0.75\ S_1 + 0.05\ S_2 = -0.05$

$\Longrightarrow S_2 = 15\ S_1 - 1$ ……………………. (2)

نعوضها (1) في المعادلة (3)

$0.6\ S_1 + 0.6\ S_2 + 0.4\ (1 - S_1 - S_2) = S_2$

$0.2\ S_1 - 0.8\ S_2 = -0.4$

نعوض (2) أيضا

$0.2\ S_1 - 0.8\ (15S_1 - 1) = 0.4$

$-4.8\ S_1 = -1.2 \Longrightarrow S_1 = 0.1017$

$S_2 = 0.5255$

$S_3 = 0.3728$

تطبيقات سلاسل ماركوف على الحاسوب باستخدام برمجية Excel

للتطبيق على برمجية Excel على سلاسل ماركوف فتبع الخطوات التالية:

1- الخطوة الأولى Step 1 تدل عدد الحالات الممكنة .

2- الخطوة الثانية Step 2 ندخل هذه الحالات (المصفوفة P)

3- الخطوة الثالثة Step 3 ندخل عدد التحويلات .

4- الخطوة الرابعة نحدد خلايا المخرجات Output

فيكون عندنا الناتج النهائي كما في الشكل التالي :

<table>
<tr><td colspan="12">Markov Chain</td></tr>
<tr><td>Step 1</td><td colspan="3">Number of states =</td><td>3</td><td colspan="2">Step 29</td><td colspan="5">Intial probality</td></tr>
<tr><td>Step 2</td><td colspan="3">Inter Markov chain</td><td></td><td colspan="2">Codes</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>Step 3</td><td colspan="3">Number of translation=8</td><td></td><td colspan="2"></td><td colspan="2">0.282</td><td colspan="2">0.303</td><td>0.415</td></tr>
<tr><td>Step 4</td><td colspan="3">Out Pate Range</td><td colspan="8">Input Markov Chain</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="2">Out put result</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0.773</td><td colspan="2">0.091</td><td colspan="2">0.136</td></tr>
<tr><td></td><td>A</td><td>B</td><td>C</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0.045</td><td colspan="2">0.864</td><td colspan="2">0.091</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0.612</td><td>0.151</td><td>0.217</td><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0.074</td><td colspan="2">0.018</td><td colspan="2">0.907</td></tr>
<tr><td>2</td><td>0.08</td><td>0.752</td><td>0.168</td><td colspan="8">Out put translation</td></tr>
<tr><td>3</td><td>0.125</td><td>0.041</td><td>0.834</td><td colspan="2"></td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">2</td><td colspan="2">3</td></tr>
<tr><td colspan="4" rowspan="3">هذا تطبيق على المثال
الثاني في الوحدة .</td><td colspan="2">1</td><td colspan="2">0.612</td><td colspan="2">0.19</td><td colspan="2">0.312</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td colspan="2">0.104</td><td colspan="2">0.66</td><td colspan="2">0.32</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td colspan="2">0.138</td><td colspan="2">0.164</td><td colspan="2">0.77</td></tr>
</table>

تمارين

س(1) اذا كانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لثلاثة مستودعات للمواد الغذائية هي

$$P = \begin{pmatrix} & A & B & C \\ & 0.6 & 0.1 & 0.3 \\ & 0.05 & 0.85 & 0.1 \\ & 0.08 & 0.12 & 0.8 \end{pmatrix}$$

وكانت نسب الشهر الأول هي [0.20 0.50 0.30]

فاحسب نسب الشهر الثاني والثالث والرابع ثم احسب نسب التوازن.

س(2) اذا كان لديك البيانات التالية عن عمال يعملون على آلتين هما A , B في خمسة أشهر (1-5) بحيث أن عدد العمال آلات (100) عامل

- عدد عمال الآلة الأولى في أول الشهر 100 عامل

  عدد العمال الباقي في نفس الوظيفة 70 عامل

  عدد العمال المنقولين من الآلة A إلى الآلة B 25 عامل

  عدد العمال التاركين للعمل 5 عمال

- عدد عمال الآلة B في أول الشهر 50 عامل

  عدد العمال الباقي في نفس الوظيفة 35 عامل

  عدد العمال المنقولين من الآلة B إلى الآلة A عمال

  عدد العمال التاركين 5 عمال

المطلوب:

أ- بناء سلسلة ماركوف وتنظم مصفوفة الاحتمالات الانتقالية.

ب- احتمال البقاء في الوظيفة على الآلة A في الشهر السادس والسابع.

ج- احتمال البقاء في الوظيفة على الآلة B في الشهر السادس والسابع.

د- نسب الشهر الثامن

هـ- ايجاد نسب التوازن

س(3) يوجد أربع شركات متنافسة في الصناعات الكيماوية المختلفة وهي A, B, C, D وفي آب عام 2004 سجلت أنصبة الشركات الأربعة في السوق 21%، 24%، 33%، 22% على الترتيب وفي الفترة بين آب وأيلول سجلت التنقلات التالية:

أ- احتفظت الشركة A بنسبة 70% من زبائنها بينما فقدت 20% إلى الشركة B و 5% إلى الشركة C و 5% إلى الشركة D .

ب- احتفظت الشركة B بنسبة 65% من زبائنها في الوقت الذي فقدت فيه 15% إلى الشركة ، 10% إلى الشركة C ، 10% إلى الشركة D .

ج- الشركة C احتفظت بنسبة 75% من زبائنها في الوقت الذي فقدت فيه 5% إلى الشركة A ، 10% إلى الشركة C ، 10% إلى الشركة D .

د- الشركة D احتفظت بنسبة 70% من زبائنها في الوقت الذي فقدت فيه 10% إلى الشركة A ، 10% إلى الشركة B ، 10% إلى الشركة C .

المطلوب:

1- نصيب كل شركة في السوق في نهاية عام 2004 .

2- نصيب كل شركة في حالة التوازن.

س(4) استخدم برمجية Excel في حل السؤال السابق.

س(5) ثلاثة شركات في مدينة عدد سكانها 20000 نسمة اذا كان نصيب كل واحدة منها على التوالي هو 34% ، 41% ، 25% على الترتيب في عام 2005 وكانت مصفوفة الخسارة هي بالنسبة المئوية.

	A	B	C
A	6%	9%	0
B	8%	0	5%
C	8%	6%	0

المطلوب:

1- تحديد عدد الزبائن لكل شركة في عام 2005 ، 2006 ، 2010

2- نصيب كل شركة عند التوازن.

3- التأكد من الحل عن طريق Excel

س(6) اتحاد كرة القدم الأردني قام باستقصاء آراء الجمهور الكروي من خلال عينة عشوائية مكونة من 500 مشجع حول تفضيلهم المدرب الاجنبي للفريق الأول وهو من ثلاثة جنسيات (إيطالي، فرنسيـ برازيلي) وذلك في عام 2006 فكانت النتائج التالية:

1- بلغ عدد المؤيدين للمدرب الايطالي في بداية العام 150 شخص ثم كسب 5 من مؤيدي المدرب البرازيلي و10 من مؤيدي المدرب الفرنسي.

2- بلغ عدد مؤيدي المدرب الفرنسي (150) شخص في بداية العام ثم كسب 20 شخص من مؤيدي المدرب الايطالي و (10) اشخاص من مؤيدي المدرب البرازيلي .

3- بلغ عدد مؤيدي المدرب البرازيلي (200) شخص في بداية العام ثم كسب (50) شخص من مؤيدي المدرب الايطالي (30) شخص من مؤيدي المدرب الفرنسي.

المطلوب: حساب تفضيلات الجمهور الكروي حول جنسية المدرب في كل من الاعوام 2007 ، 2008 وتفسير النتائج.

الوحدة العاشرة

نموذج المخزون

Inventory Models

الوحدة العاشرة

نموذج المخزون

Inventory Models

مقدمة :

تعتبر الرقابة على المخزون وادارته من أهم التحديات التي تواجه المؤسسات الاقتصادية في عصرنا هـذا، ومراقبة المخزون وادارته بفاعلية يتوقف على عدد السلع وطبيعة الطلب عـلى هـذه السـلع والـزمن الفاصـل بـين استلام الطلبيات، وينتج عنه إما تعظيم الأرباح أو تقليـل تكلفـة الاحتفـاظ بـالمخزون، حيـث أن السـيطرة الكفـوء توجب عدم الاحتفاظ فكميات فائضة عن الحاجة الحالية أو المتوقعة للمخزون. لأن هذا يؤدي إلى تكاليف لا مبرر لها.

عناصر التكلفة الأساسية للتخزين :

1- تكلفة شراء أو انتاج وحدة : Purchase Price or Production cost

يختلف مفهوم كلفة الوحدة بين التاجر والمنتج فالتاجر تمثل له السعر المدفوع للممول بما فيه أجـرة الشـحن. أمـا المنتج فتمثل كمية النقود المصروفة على هذه الوحدة، وهذه التكلفة قد تكـون ثابتـة أو مرتبطـة بحجـم الطلبيـة وبالتالي يستفيد التاجر من خصم الكمية أو المنتج من وفورات الانتاج.

2- تكلفة إعداد الطلبية : Setup or ordering cost

تعتبر هذه التكلفة ثابتة ومستقلة عن حجم الكمية المطلوبة.

3- تكلفة الاحتفاظ بالمخزون : Holding cost

وهذه التكلفة تمثل مختلف التكاليف للاحتفاظ بالسلعة داخل المخزن. مثل التخزين، التأمين، التلف، الكهربـاء، ... الخ

4- تكلفة العجز : Penalty or shortage cost

تحدث هذه التكلفة عندما يعجز المخزن عن تلبية طلبات الزبائن مـما يـؤدي إلى قبـول الزبـون بتأجيـل طلبـه أو رفض الطلبية وتمثل هذه التكلفة الخسارة الناتجة فقدان ثقة الزبون مضافاً لها تكاليف ادارية أخرى هذا في حالـه المشتريات، أما في حالة المبيعات فتمثل الربح الضائع نتيجة فقدان الطلب بالاضافة إلى الخسارة الناتجة عن فقدان ثقة الزبون.

أما التكلفة العامة للمخزون فتتمثل بالمخطط التالي:

التكاليف الكلية للمخزون = تكلفة شراء الوحدات + تكلفة اعداد الطلبية + تكلفة الاحتفـاظ بـالمخزون + تكلفـة الحجز

بعض المفاهيم الاقتصادية المتعلقة بالمخزون

1- حجم الطلبية Quantity ordered

عدد الوحدات من المخزون التي يتم استلامها ووضعها في المخزن.

2- دورة الطلب : Order cycle

وهي الفترة الزمنية التي تفصل بين طلبيتين متلاحقتين وتقاس إما باليوم أو الشهر أو السنة.

3- فترة التوريد : Lead time

الفترة الزمنية بين اصدار أمر الشراء ووصول الشحنة إلى المخازن واستلامها.

4- نقطة إعادة الطلب: Reorder point

الوقت الذي يجب فيه اعادة الطلب عندما ينتهي المخزون .

5- مخزون الامان : Safety stock

احتياطي المخزون تحسباً للظروف غير العادية وتكون كمية إضافية عن حاجة الشركة.

6- تكلفة الطلبية : Order cost

تكاليف اعداد الطلبية للشراء وهي تشمل كافة التكاليف المتعلقة باعادة الطلب ولا تعتمد في معظم الاحيان على حجم الطلبية.

7- سعر الشراء : Purchase price

وتمثل سعر المادة المشتراة أي سعر الوحدة × عدد الوحدات المشتراة

8- المخزون الاحتياطي : Buffer stock

كمية المادة الموجودة في المخازن احتياطي في حال نفذ المخزون وتأخرت الطلبية.

نماذج المخزون :

1- كمية الطلب الاقتصادية (EOQ) Economic order Quantity

يعتبر هذا النموذج الأكثر شهرة في نماذج المخزون والأكثر استخداما بالإضافة لأنه أقدم نموذج ويستخدم في الحالات التالية :

أ- الطلب معروف، محدد، ثابت على طول الوقت .

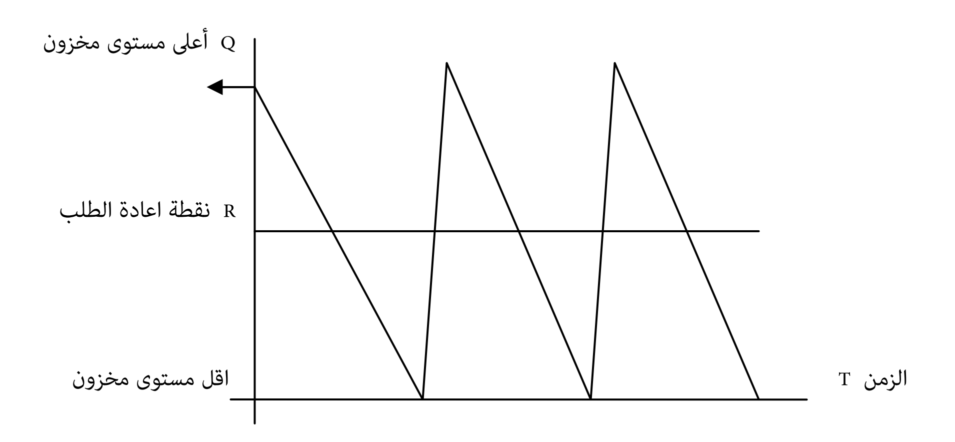
ب- العجز في المخزون غير مسموح به.

ج- تثبيت أوقات الانتظار لاستلام الطلبيات.

د- استلام الكمية المطلوبة وقت طلبها.

كمية الطلب الاقتصادية وهي الكمية التي تنخفض عندها التكاليف

الاحتفاظ بالمخزون وكلفة الطلبية كما في الشكل التالي



يمثل هذا الشكل دوره الطلب لكمية الطلب الاقتصادية حيث يتم الأمر بالطلبية الجديدة عندما يصل المخزون إلى نقطة اعادة الطلب R وتسلم الطلبية للمخازن عند الوصول إلى اقل مستوى مخزون والفـترة الزمنيـة بـين الطلـب والاستلام لكل طلبية يعتبر ثابت.

ويتم حساب كلفة الطلب الاقتصادية باستخدام العلاقات التالية:

$$AOC = \frac{Co \times D}{Q}$$

حيث :

Co = كلفة الطلبية

D = كمية الطلب السنوية

Q = حجم الطلبية

AoC = Annual ordering cost التكاليف الكلية السنوية

أما تكاليف الاحتفاظ السنوية Annual carring cost (ACC)

فهي

$$ACC = \frac{Cc \times Q}{2}$$

حيث

Cc = كلفة الاحتفاظ السنوية للوحدة

وتكون التكاليف الكلية للمخزون السنوية هي :

$$TC = AOC + ACC$$

$$= \frac{CoD}{Q} + \frac{CcQ}{2}$$

وتكون العلاقة الرياضية التي تتعلق بكمية الطلب الاقتصادية (EOQ)

$$EOQ = \sqrt{\frac{2CoD}{Cc}}$$

وعند تعويض كمية الطلب الاقتصادية في قانون التكلفة الكلية فإن التكلفة الكلية تكون

$$Tc_{min} = \frac{CoD}{EoQ} + \frac{Cc(EOQ)}{2}$$

وهي أقل كلفة مخزون

أما الفترة بين الطلبية والاخرى (دورة الطلبية t)

$$t = \frac{\text{عدد ايام السنة}}{\text{عدد الطلبيات في السنة}} = \frac{T}{n}$$

بحيث يكون

$$\text{عدد الطلبات السنوية} = \frac{\text{كمية الطلب السنوية}}{\text{كمية الطلب الاقتصادية}}$$

$$n = \frac{D}{EOQ}$$

مثال :

اذا كان لسلعة ما الطلب السنوي (120000) وحدة سعر الوحدة (5) دنانير وتكلفة تخـزين الوحـدة (20%) مـن سعرها. وتكلفة تجهيز الطلبية 25 دينار، إحسب

أ- كمية الطلب الاقتصادية .

ب- التكلفة الكلية للمخزون.

ج- فترة دورة الطلبية اذا كان عدد أيام السنة الفعلية 260 يوم

الحل:

Cc = 5 * 0.20 = 1

أ-

$$EOQ = \sqrt{\frac{2Co \times D}{Cc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2*25*120000}{1}}$$

= 2449.5

= 2450 unit

ب-

$$Tc = \frac{CoD}{EOQ} + \frac{Cc(EoQ)}{2}$$

$$= \frac{25 \times 120000}{2450} + \frac{1*2450}{2}$$

= 1224.5 + 1225 = 2449.5 JD

جـ- عدد الطلبيات السنوية

$$n = \frac{D}{EOQ}$$

$$= \frac{120000}{2450} = 48.98 = 49$$

أما دورة الطلبية

$$t = \frac{260}{49} = 5.31 \text{ day}$$

مثال :

وجد لدى شركة الاسد للاستيراد والتصدير أن حجم مبيعاتها السنوية من السيارات الصغيرة (8000) سيارة وأن تكلفة شراء السيارة الواحدة (10000$) وكل طلبية تعدها الشركة تكلفها (1500) دينار، أما معدل تكلفة الاحتفاظ بالسيارة الواحدة 4% من قيمتها

المطلوب:

أ- تحديد كمية الطلب الاقتصادية.

ب- التكلفة الكلية للاحتفاظ بالمخزون.

ج- العدد الامثل للطلبيات في السنة وطول الدورة.

الحل:

$D = 8000 \quad Co = 1500$

$$Cc = \frac{4}{100} \times 10000 = 400$$

أ-

$$EOQ = \sqrt{\frac{2CoD}{Cc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2*1500*8000}{400}} = 245$$

ب-

$$Tc = \frac{CoD}{EoQ} + \frac{Cc(EoQ)}{2}$$

$$= \frac{1500 \times 8000}{245} + \frac{400 \times 245}{2}$$

$$= 48979.6 + 49000 = 97979.6$$

ج-

$$N = \frac{D}{EoQ} = \frac{8000}{245} = 32.65$$

$$= 33$$

دورة الطلبية اذا كان عدد ايام العمل الاسبوعي 5 أيام وعدد اسابيع السنة 52 اسبوع فإن عدد ايام العمل السنوي = 5 * 52 = 260 يوم

$$St = \frac{260}{33} = 7.9 \text{ day}$$

2- كمية الانتاج الاقتصادية : (EPQ)

Economic Production Quantity

يتم استلام الطلبية في هذا النموذج بشكل تدريجي حسب الانتاج خلال فترة زمنية محددة ويكون متوسط المخزون خلال فترة الاستلام نصف كمية الحد الاقصى للمخزون أي $\frac{Q}{2}$ ويمكن استخدام هذا النوع اذا كانت الطلبية ليست مباشرة للانتاج ولكن ننتج منها جزء يستخدم في خط الانتاج الكلي. أما المصطلحات المستخدمة في هذا النموذج فهي نفس المصطلحات المستخدمة في النموذج السابق مع استخدام المصطلحات التالية:

P = معدل الاستخدام اليومي لاستلام الطلبيات أو يسمى معدل الانتاج.

d = معدل الطلب اليومي على المخزون

فإذا فرضنا أنه غير مسموح بالعجز في المخزون فإن P=d أي أن معدل الطلب يساوي معدل الانتاج اليومي.

ولكن اذا كان معدل الطلب أقل من معدل الانتاج فإن d<P

أما العلاقات المستخدمة في هذا النموذج فهي

الوقت اللازم لاستلام الطلبية $t = \frac{P}{d}$

كمية المخزون المستخدمة خلال فترة زمنية $Qt = \left(\frac{Q}{P}\right)d$

الحد الاقصى لمستوى المخزون

$$THC = Q\left(1-\frac{d}{P}\right)$$

متوسط مستوى المخزون

$$Qv = \frac{Q}{2}\left(1-\frac{d}{P}\right)$$

كلفة الاحتفاظ الكلية بالمخزون

$$Tc = \frac{CoD}{EPQ} + \frac{CcEPQ}{2}\left(1-\frac{d}{P}\right)$$

حيث أن الحجم الامثل للانتاج (كمية الطلب الاقتصادية)

$$EPQ = \sqrt{\frac{2CoD}{Cc\left(1-\frac{d}{P}\right)}}$$

مثال:

اذا كان لمصنع انتاج المعلبات الطلب السنوي 7000 علبة وحجم الانتاج السنوي 9000 علبة وتكلفة انتاج العلبة 6 دنانير ومعدل تكلفة الاحتفاظ بالمخزون 0.19 وتكاليف الانتاج للدفعة الواحدة 60 دينار فأوجد

1- الوقت اللازم لاستلام الطلبية

2- كمية الطلب الاقتصادية

3- التكاليف الكلية للمخزون

الحل:

1) P = 9000 , d = 7000

$$\therefore\ t = \frac{9000}{7000} = 2\ \text{days}$$ يومان

$$2)\ EPQ = \sqrt{\frac{2CoD}{Cc\left(1-\frac{d}{P}\right)}}$$

$$EPQ = \sqrt{\frac{2*7000*60}{6*0.19\left(1-\frac{7000}{9000}\right)}}$$

$$= \sqrt{\frac{840000}{0.253}} = 1822.13$$

$$3)\ Tc = \frac{CoD}{EPQ} + \frac{CcEPQ}{2}\left(1-\frac{d}{P}\right)$$

$$= \frac{7000*60}{1822.13} + \frac{6*0.19*1822.13}{2}\left(1-\frac{7000}{9000}\right)$$

= 230.5 + 230.8 = 461.3

3- كمية الطلب الاقتصادية بوجود خصم :

Economic Order Quantity with Discount

بعض الشركات تعطي خصم للكميات على الطلب أي عند طلب كمية معينة من المادة يعطي نسبة خصم وهذه النسبة تزيد حسب زيادة الكمية المطلوبة، ويكون الخصم عادة على سعر الشراء P وبالتالي فإن التكلفة الكلية للمخزون هي:

$$Tc = \frac{CoD}{Q} + \frac{CcQ}{2} + PD$$

حيث D حجم الطلب السنوي

أما Q فهي

$$Q = \sqrt{\frac{2CoD}{Q}}$$

مثال:

تقدمت شركة الحاسبات المثالية إلى وزارة التربية والتعليم بغرض توريدها إلى المدارس الحكومية بعرض لبيعها اجهزة حاسوب وكانت الأسعار كالآتي:

حجم الطلب	السعر بالدينار
1-99	500
149-100	350
150 فما فوق	280

فإذا كانت كلفة الاحتفاظ بالحاسوب الواحد في الوزارة 50 دينار وكلفة الطلبية 1750 دينار والطلب المتوقع لهذه السنة هو (300) جهاز، فاوجد :

1- كمية الطلب الاقتصادية وفقاً لهذه المعطيات.

2- التكلفة الاجمالية لكمية الطلب الاقتصادية.

الحل:

Co = 1750

Cc = 50

D = 200

1- كمية الطلب الاقتصادية

$$Q = \sqrt{\frac{2CoD}{Cc}}$$

$$= \sqrt{\frac{2*1750*200}{50}} = 118.32$$

2- التكلفة الاجمالية هي

$$T = \frac{CoD}{Q} + \frac{CcQ}{2} + PD$$

$$= \frac{1750*200}{118.32} + \frac{50*118.32}{2} + 350*200$$

= 2958.1 + 2958 + 70000

= 75916.1 JD

4- نقطة إعادة الطلب : Re ordering Point

تكون نقطة اعادة الطلب النقطة التي يصل اليها المخـزون حتـى نطلـب الطلبيـة الاخـرى أي النقطـة التـي يصـل المخزون فيها إلى مخزون الأمان وتكون هذه النقطة هي:

R = dL

حيث :

R = نقطة اعادة الطلب

d = حجم الطلب في وحدة زمن

$$d = \frac{D}{t}$$

L = فترة الانتظار لاستلام الطلبية

t = عدد ايام السنة الفعلية

مثال:

اذا كان لشركة انتاجية لدينا المعلومات التالية:

- معدل ايام السنة الفعلية 250 يوم
- كمية الطلب السنوية (8000) وحدة
- فترة الانتظار لاستلام الطلبية 20 يوم فما هي نقطة اعادة الطلب

الحل:

D = 8000

t = 250

L = 20

$$d = \frac{D}{t} = \frac{8000}{250} = 32$$

$\therefore$ R = 32 * 20 = 640

$\therefore$ عندما يصل المخزون إلى (640) وحدة يجب اعادة الطلب للطلبية التالية.

تمارين

س(1) اذا كان حجم الطلب السنوي لسلعة ما هي (1000) وحدة وتكاليف الطلبية الواحدة 130 دينار، وتكاليف الاحتفاظ بالمخزون هو 18% من حجم المخزون وتكلفة الوحدة الواحدة ديناران أوجد كمية الطلب الاقتصادية.

س(2) اذا كانت كلفة الطلبية الواحدة 8 دنانير، وعدد الوحدات المستخدمة خلال السنة (1000) وحدة، وتكلفة الاحتفاظ بالمخزون للوحدة 30 دينار، احسب

أ- كمية الطلب الاقتصادية.

ب- التكلفة الكلية للمخزون.

س(3) تستخدم شركة (100000) وحدة في السنة من سلعة ما وتكلفة الاحتفاظ بالوحدة خلال السنة (3) دنانير وتكلفة الطلبية (60) دينار، فما هي كمية الطلب المثلى والتكاليف الكلية.

س(4) تعدد الاحتياجات السنوية لمصنع الادوية من بعض المواد الكيماوية الخاصة بصناعة الادوية (2000) جالون وتكلفة الاحتفاظ للجالون الواحد في السنة (8) دنانير، الوقت اللازم لاستلام الطلبية (12) يوم، علماً بأن عدد أيام العمل السنة (260) يوم، أوجد:

أ- نقطة اعادة الطلب.

ب- الكمية الاقتصادية للطلب.

ج- التكاليف الكلية للمخزون.

د- عدد الطلبيات السنوية.

س(5) اذا كان الطلب السنوي لشركة ما على سلعة معينة (800000) وحـدة سـنويا، وعـدد أيـام العمـل السـنوية (250) يوم، وتكلفة تخزين الوحدة (0.30 دينار) وتكلفة الطلبية الواحدة (40) دينار، فترة الانتظار لاستلام الطلبية (10) أيام. أوجد

أ- نقطة إعادة الطلب.

ب- عدد الطلبيات السنوية.

ج- الكمية الاقتصادية للطلب.

د- التكاليف الكلية للمخزون.

س(6) قدم لشركة الصناعات الكيماوية عرض للتزود بالمواد الاولية ولائحة بالاسعار كالآتي:

الكمية	السعر
199-1	65
599-200	59
600 فأكثر	56

فإذا كانت الشركة تستخدم (700) وحدة سنويا من هذه المادة وتبلغ كلفة الاحتفاظ بالمخزون السنوي (14) دينار للوحدة، وكلفة الطلبية (300) فما هي الكمية المثلى للطلبية وما هي تكلفة الاحتفاظ بالمخزون.

س(7) يحتاج مصنع التربون للسيارات إلى مواد أولية للتصنيع تقدر بحوالي (2000) وحدة سنوياً، فإذا كانت تكلفة طلبية الشراء (15) دينار لكل طلبية، وتقدر تكاليف الاحتفاظ بالمخزون (0.20) دينار للوحدة وسـعر الوحـدة (5) دنانير، وعدد ايام السنة الفعلية (250) يوم وفترة التوريد (10) أيام وكانت عروض الخصم هي:

الكمية	السعر
0-399	5
400-799	4
800 فأكثر	3

المطلوب:

أ- احسب الكمية الاقتصادية والتكاليف الكلية بدون الخصم.

ب- احسب الكمية الاقتصادية والتكاليف الكلية مع الخصم.

ج- عدد الطلبيات في السنة.

د- طول الدورة.

هـ- نقطة إعادة الطلب.

س(8) اذا كان لشركة صناعة الكابلات الكهربائية طلبية لتوريد كمية من النحاس تقدر بحوالي 2400 طن وان تكلفة الطلبية الواحدة (320) دينار وتكلفة التخزين 20% من القيمة، وعدد ايام العمل السنوية (300) يوم وحدة تلبية الطلبية 5 أيام، وتعطي الشركة خصم على الكميات كما في الجدول.

الكمية بالطن	الخصم بالدينار
0-299	36
300-799	32
800- فأكثر	30

المطلوب:

أ- كمية الطلب المثلى.

ب- التكلفة الكلية.

ج- نقطة إعادة الطلب.

د- طول دورة المخزون.

الوحدة الحادية عشرة

المحاكاة

Simulation

الوحدة الحادية عشرة

المحاكاة

Simulation

مقدمة :

في كثير من النماذج الرياضية يكون حلها بالطريقة التحليلية التقليدية ولكن في بعض النماذج يكون من الصعوبة بمكان حلها فنلجأ إلى أسلوب غير تقليدي في حل هذه المشكلة وهذا الأسلوب يسمى المحاكاة بحيث يتم عمل نموذج مصغر عن المشكلة بكافة جوانبها ومن ثم ايجاد خطوات للحل، وقد اثبت نموذج المحاكاة كفاءة ملحوظة في معالجة قسم كبير من المسائل المعقدة مثل مسائل التخزين وخطوط الانتظار والتنبؤ إلى غير ذلك. وفي معظم الحالات يتم استخدام الحاسوب في نماذج المحاكاة.

فوائد نموذج المحاكاة :

1- يساعد في حل النماذج المعقدة والتي يصعب حلها من خلال النماذج الرياضية التقليدية ويستعان بالحاسوب عادة في حلها.

2- سهولة استخدام نموذج المحاكاة تجعل منه أكثر فاعلية من النماذج الإحصائية والتحليلية التي تحتاج إلى فرضيات كثيرة .

3- تجنب المخاطر المحتملة من خلال التجريب على نموذج المحاكاة والتي تساعد على فهم كثير من سلوك الأنشطة وتتيح الفرصة أمام الإدارة في عمل تجارب عدة على النموذج.

4- تتيح لمتخذ القرار في الادارة نجاحات وخبرات جديدة في حل المشكلات التي تواجهه حيث يمكن تطبيقه على نطاق واسع من المواقف.

5- يمكن من خلال المحاكاة تحديد التأثيرات المحتملة وبعيدة المدى على المشكلة المراد حلها.

وتستخدم نماذج المحاكاة من أجل :

1- دراسة النظام المعمول به.

2- تحليل بعض الانظمة المقترحة.

3- تخطيط وتنظيم انظمة مثالية متطورة.

مجالات استخدام نماذج المحاكاة :

يمكن إجمال مجالات استخدام نماذج المحاكاة في ناحيتين اساسيتين:

أولاً: المجالات النظرية في الرياضيات والفيزياء والكيمياء مثل: حساب المساحات المحددة، حسابات المصفوفات، ايجاد قيمة بعض نواتج الثوابت مثل π ، حل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية، تحديد مسار حركة الجسيمات في المستوى .

ثانياً: المجال التطبيقي في الادارة والاقتصاد والنشاطات الاجتماعية والانسانية مثل العمليات الانتاجية والتكنولوجية ومجالات التخزين وانظمة صفوف الانتظار، عمليات التخطيط، التنظيم الاقتصادي، هجرة السكان، ومشاكل السلوك الاجتماعي، وايضا تستخدم نماذج المحاكاة في دراسة جسم الانسان من الداخل وفي العلوم العسكرية ايضاً.

خطوات عمل نموذج المحاكاة :

الخطوة الأولى: صياغة المشكلة :

يقدم وصف كامل للمشكلة المراد عمل نموذج لها، حيث يتم في البداية تحديد المشكلة الخاضعة للبحث ثم نبحث في تفاصيل المشكلة وتحديد الإجراءات التي سيتم من خلالها وضع نموذج المحاكاة لهذه المشكلة ووضع البيانات اللازمة للنموذج.

الخطوة الثانية: صياغة النموذج

يتم اعداد نموذج رياضي ومنطقي للمشكلة كما في نماذج بحوث العمليات الباقية كلها، ولكن هذا النموذج يكون مصغر عن النموذج الأصلي ويجب أن لا يتعرض للجزئيات، ولكن قبل ذلك يجب دراسة النظام المشكلة إحصائياً وديناميكياً والنموذج المعد يجب أن يكون بسيط الفهم ولكن يظهر بشكل واقعي الصفات المميزة للنظام المشكلة.

الخطوة الثالثة: تنفيذ النموذج

يتم عادة تصميم برنامج حاسوب وتنفيذ النموذج عليه حيث يتم تنفيذ البرنامج باحدى لغات المحاكاة في الحاسوب Simulation أو Gusp أو غيرها من لغات الحاسوب المعمول بها الآن .

الخطوة الرابعة : اختبار النتيجة :

يتم اختبار النتيجة من حيث ملائمتها للواقع والحل الصحيح اذا كانت المحاكاة اعطت الحل الأفضل فينتهي النموذج وإلا فإننا نغير الفرضيات البدائية ونعيد الخطوات السابقة.

طريقة مونت كارلو في المحاكاة :

تعتمد هذه الطريقة على الأرقام العشوائية سواءً باستخدام جدول الأرقام العشوائية أم الحاسوب، حيث أن كل عملية عشوائية يمكن وضعها ضمن مخطط تعاقبي وهذه الطريقة تعتمد على استبدال عملية حقيقية بعملية محاكاة وفق نفس المخطط التعاقبي بالمحافظة على الطبيعة الاحتمالية لنتائج التجربة الحقيقية باستخدام الأرقام العشوائية.

مثال:

أوجد نموذج محاكاة لسلوك مستهلك يعرض عليه ثلاثة اصناف من الزعتر C , B , A فإذا كانت مصفوفة الاحتمالات الانتقالية لماركوف هي:

$$P = \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0.8 & 0.1 & 0.1 \\ B & 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ C & 0.2 & 0.2 & 0.6 \end{array}$$

لنفرض أن أخر عملية شراء للمستهلك كانت من الصنف C حتى نرى كيف ستتم عملية الاختيار نعطي أرقاماً مـن (0-9) للأصناف الثلاثة حيث يخصص الرقمان (0 ، 1) للاختبار A (2 ، 3) للاختبار B ، والارقام (4 ، 9) للاختبـار C ، وعند تطبيق الاختبار نختار أرقاماً عشوائية من جدول الأرقام العشوائية في نهاية الكتاب بحيـث نختـار (15) رقـماً من جدول الأرقام العشوائية من (0-9) ونبدأ من العمود الأيسر في الجدول لتكون النتائج المعطاة كـما في الجـدول التالي وهي توضح عدد الاختبارات لكل صنف. ونلاحظ من خلال الجدول أن الصنف A يختـار (4) وان الصـنف B يختار (4) مرات والصنف C يختار (7) مراتب. وهنا نرى أن اكثر اختبـارات كانـت للصـنف C وبالتـالي يكـون هـو الصنف الافضل.

الاختيار	الرقم العشوائي	الصنف
1	5	C
2	2	B
3	4	C
4	3	B
5	0	A
6	6	C
7	1	A
8	0	A
9	2	B
10	9	C
11	5	C
12	0	A
13	2	B
14	8	C
15	5	C

مثال:

يرغب موزع للمواد الغذائية بتحديد عدد صناديق العصير التي يجب طلبها يوميا، اذا كـان عـدد هـذه الصـناديق يتراوح بين (14-18) صندوق اسبوعياً. فإذا كان الطلب على الصناديق للمئة يوماً السابقة هي كما في الجدول

الصناديق المطلوبة يوميا (X)	تكرار الطلب	احتمال الطلب (P)
14	15	0.15
15	40	0.40
16	10	0.10
17	20	0.20
18	15	0.15
المجموع	100	1

المطلوب: تحديد عدد الصناديق الواجب طلبها يوميا باستخدام طريقة مونت كارلو.

الحل:

بما أن العدد الموجود لدينا هو 100 صندوق فإننـا نعطـي أرقامـاً مـن (00) إلى (99) ونجـزأ هـذه الأرقـام حسـب الاحتمالات المعطاة كما في الجدول التالي:

عدد الصناديق المطلوبة X	احتمال الطلب P	الارقام العشوائية المخصصة للطلب
14	0.15	0-14
15	0.40	15-54
16	0.10	55-64
17	0.20	65-84
18	0.15	85-100

والان نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية ونختار رقما مكون من خانتين ونبحث عنه ضمن الفئة الموجودة في الجدول ونكرر الاختبارات على سبيل المثال عشرة مرات لنرى ما هو العدد الأكبر ضمن هذه الاختبارات

الاختبار	الرقم العشوائي	عدد الصناديق المختارة
1	51	15
2	24	15
3	45	15
4	30	15
5	03	14
6	64	16
7	15	15
8	09	14
9	21	15
10	91	18

نلاحظ هنا أن اكثر طلب متكرر هو (15) وبالتالي يكون الطلب الامثل لعدد الصناديق يومياً هو (15) صندوق .

المحاكاة ونماذج المخزون :

مثال:

يرغب مستثمر في تقويم استراتيجية خاصة بشراء وبيع مخزون يتكون من سلعة واحدة فقط، ويبلغ عدد الوحدات الموجودة في المخزن من السلعة (100) وحدة، بينما يبلغ سعر الوحدة (5) دنانير، ولنفترض أن السعر يتغير من يوم لاخر بمعدل دينار واحد فقط زيادة أو نقصان، اذا كان المستثمر يقوم بعملية واحدة فقط يومياً ويدفع عليها 2% من قيمتها عمولة سواءً كانت بيع أو شراء.

المطلوب: عمل نموذج محاكاة لدراسة رأي مستشاره الاقتصادي حيث اقترح عليه:

1- اذا كان بحوزتك مخزون وبدأ السعر بالانهيار فتخلص منه بالبيع.

2- اذا لم يكن لديك مخزون وكان السعر في صعود فاشتري .

الحل:

من خلال الاقتراح السابق يتضح لنا أن على المستثمر الاحتفاظ المخزونة عندما يكون السعر ثابت أو متصاعد اذا كان لديه مخزون وعدم الشراء اذا لم يكن لديه اذا كان السعر ثابت أو بدأ بالانهيار، فإذا حلل المستثمر البيانات التاريخية للسلعة من أجل أن يصل إلى قرار حول تقلبات السعر، فكان نموذج حركة السعر كما في الجدول احتمالات حركة سعر السلعة التالي:

سعر السلعة	سعر السلعة اليوم		
	ارتفاع	ثبات	انخفاض
ارتفاع	0.4	0.3	0.3
ثبات	0.3	0.4	0.3
انخفاض	0.3	0.3	0.4

بالنظر لهذا الجدول نرى من الصف الأول أنه اذا كان سعر السلعة يوم الاحد مثلاً (11) دينار فإن احتمال أن يصبح (12) يوم الاثنين 1 .

واحتمال أن يبقى ثابتاً $\left(\frac{1}{4}\right)$ واحتمال أن يصبح (10) دنانير $\left(\frac{1}{4}\right)$ فإذا فرضنا أن ارتفاع السعر وثباته وانخفاضه يأخذ القيم التالية من جدول الأرقام العشوائية كما في الجدول.

	ارتفاع	**ثبات**	**انخفاض**
ارتفاع	6-3	2-0	9-7
ثبات	2-0	6-3	9-7
انخفاض	2-0	9-7	6-3

فيكون (0-2) ارتفاع، (3-6) ثبات، (7-9) انخفاض اذا طبقنا التجربة 15 مرة (يوم) كما في الجدول التالي:

اليوم	الرقم العشوائي	سعر الأمس	سعر اليوم بالدينار
0	-	-	10
1	5	نفس السعر	10
2	2	ارتفاع	11
3	4	نفس السعر	11
4	3	نفس السعر	11
5	0	ارتفاع	12
6	6	نفس السعر	12
7	1	ارتفاع	13
8	0	ارتفاع	14
9	2	ارتفاع	15
10	9	انخفاض	14
11	5	نفس السعر	14
12	0	ارتفاع	15
13	2	ارتفاع	16
14	8	انخفاض	15
15	5	نفس السعر	15

وعملاً بالقاعدة انه عند الارتفاع يشتري وعند الانخفاض يبيع فإن السعر للملكية المخزون عنده يكون كما في الجدول التالي

اليوم	سعر المخزون	القرار	الوحدات المخزنة	قيمة المخزون	الصندوق
0	10		100	1000	
1	10		100	1000	
2	11		100	1100	
3	11		100	1100	
4	11		100	1100	
5	12		100	1200	
6	12		100	1200	
7	13		100	1300	
8	14		100	1400	
9	15		100	1500	
10	14	بيع	0	0	1372
11	14		0	0	1372
12	15	شراء	89	1246	10.3
13	16		89	1246	10.3
14	15	بيع	0	0	1318.6
15	15		0	0	1318.6

نلاحظ من جدول المحاكاة هذا أن المستثمر يكون لديه في نهاية اليوم الخامس عشر مبلغ 1318.6 دينار وقد كان من الافضل أن يتوقف في اليوم العاشر حيث كان سيأخذ مع صافي مبلغ 1372 دينار عند بيعه (100) وحدة .

مثال:

شركة البكري لانتاج الحلويات تبيع الحلويات حسب الطلب فإذا كان الطلب اليومي على انتاج الشركة واحتمالاتها

الطلب	0	10	20	30	40	50 وحدة
الاحتمال	0.01	0.2	0.15	0.50	0.12	0.02

استخدم نموذج المحاكاة لايجاد حجم الطلب للعشرة أيام التالية عن طريق الأرقام العشوائية، كما في الجدول

الطلب اليومي	الاحتمال	الاحتمال التراكمي	فترة الأرقام العشوائية
0	0.01	0.01	00
10	0.20	0.21	20-01
20	0.15	0.36	35-21
30	0.50	0.86	85-36
40	0.12	0.98	97-86
50	0.02	1.00	99-98

الحل:

نأخذ من جدول الأرقام العشوائية عشرة أرقام للأيام العشرة وتقارنها بجدول الاحتمال السابق ليتكون لدينا الجدول التالي :

الطلب	الرقم العشوائي	اليوم
30	51	1
20	24	2
30	45	3
20	30	4
10	03	5
30	64	6
10	15	7
10	09	8
20	21	9
40	91	10
220	المجموع	

وبالتالي يكون معدل الطلب اليومي هو $\frac{220}{10}$ = 22 وحدة في اليوم

نموذج محاكاة لصفوف الانتظار :

مثال:

اذا كان في محطة بنزين مضخة واحدة للبنـزين ولنفـترض أن وصـول الزبـائن إلى النظـام يخضـع لتوزيـع بواسـون بمعدل 3 زبائن في السـاعة وأن زمـن أداء الخدمـة 0.2 مـن السـاعة بـاحتمال 50% وأداء الخدمـة بـزمن 0.6 مـن الساعة باحتمال قدرة 50% وأن نظام أداء الخدمة للزبـائن يكـون حسـب نظـام (FCFS) الواصـل أولاً يخـدم أولاً، وطول صف الانتظار غير محدد . وفي بداية العملية لا يوجد أي زبون في صف الانتظار. إعمل نموذج محاكـاة لهـذا النظام

الحل:

$\lambda = 3$ والفاصل الزمني لوصول الزبائن

$$t = -\left(\frac{1}{\lambda}\right)\text{LnR} = -\frac{1}{3}\text{LnR}$$

ولكن زمن أداء الخدمة محدد بزمنين وبالتالي فإن

μ =	0.2 / الساعة	:	$0 \leq R \leq 0.4$
	0.6 / الساعة	:	$0.4 \leq R \leq 1$

ويكون عمل النموذج حسب الدخول والخروج للزبائن حيث يكون في الوصول

1- حساب الفاصل الزمني واضافته للزمن الحالي.
2- اختبار حالة النظام عاطل عن العمل أو مشغول حيث

- اذا كان النظام عاطل عن العمل فإن زمن نهاية الخدمة يساوي (الزمن الحالي+μ) ويتم حساب وقت تعطيل الخدمة
- اذا كان النظام مشغول فإن طول صف الانتظار يزداد واحد ويكون في نهاية الخدمة.

1- اختبار الصف اذا كان خالي أم لا.
2- اذا كان الصف خالي يكون النظام عاطل عن العمل.
3- اذا كان الصف غير خالي فإن مركز الخدمة يخدم زبون وينقص طول صف الانتظار واحد ويحسب وقت انتظار الزبون.

بما أن بداية الخدمة لا يكون هناك أي زبون فإن النظام يبدأ بعاطل عن العمل، ويكون أول زبون يصل إلى النظام بعد زمن

$$t_1 = -\frac{1}{3}\text{Ln}\ (0.4764) = 0.25$$

ويكون $t_1=0.25$ هو زمن وصول الزبون الأول أما زمن وصول الزبون الثاني

$$t_2 = 0.25 + \left[-\frac{1}{3}\text{Ln}0.8416\right] = 0.31$$

ويكون زمن أداء الخدمة للزبون الأول هو $(\mu=0.6)$ وذلك لان $(R=0.4764)$

ويكون زمن انتهاء الخدمة للزبون الأول هو $t_1 = t_1 + \mu$

$= 0.25 + 0.6 = 0.85$

ويكون وقت تعطيل مركز الخدمة عن العمل هو

$V = t_1 - t_0 = 0.25 - 0 = 0.25$

ووقت انتظار الزبون الأول $(W_1 = 0)$

أما الزبون الثاني فإنه سيصل في اللحظة $t_2=0.31$ وسيكون النظام في حالة عمل وبالتالي سينتظر الزبونة في صف الانتظار وسيكون طول صف الانتظار Q

$Q = 0 + 1 = 1$

أما الزبون الثالث فإن زمن وصوله هو

$$t_3 = 0.31 + \left[-\frac{1}{3}\text{Ln}(0.342)\right] = 0.67$$

وفي هذه اللحظة سيكون النظام مشغول بالزبون الأول وسيكون طول صف الانتظار في هذه اللحظة هو

$Q = 1 + 1 = 2$

أما الزبون الرابع فيكون زمن وصوله

$$t_4 = 0.67 + \left[-\frac{1}{3} \text{Ln}(0.68277) \right] = 0.8$$

وطول صف الانتظار هو

$Q = 2 + 1 = 3$

والزبون الخامس

$$t_5 = 0.80 + \left[-\frac{1}{3} \text{Ln}(0.8521 \right] = 0.85$$

وسيكون طول صف الانتظار

$Q = 3 + 1 = 4$

ولكن في هذه اللحظة سيكون انتهى النظام من خدمة الزبون الأول وبالتالي سيكون طول صف الانتظار

$Q = 4 - 1 = 3$

أما وقت الانتظار للزبون الثاني فهو

$W_2 = 6.85 - 0.31 = 0.54$

وستكرر العملية لباقي الزبائن حسب الزمن المقترح فإذا كان الزمن ساعتان فإن النتائج تكون كما في الجدول

عدد الوحدات الواصلة	الاعداد العشوائية R	زمن الوصول t	طول صف الانتظار	وقت تعطل الخدمة V	وقت انتظار الزبون في الصف W	زمن أداء الخدمة μ
1	0.4764	0.25	0	0.25	0	0.6
2	0.8416	0.31	1	0	0.94	0.6
3	0.3420	0.67	2	0	0.38	0.2
4	0.6827	0.80	3	0	0.85	0.6
5	0.8521	0.85	4	0	1.15	0.6
6	0.5806	1.03	4	0	0.97	0.6
7	0.9285	1.05	5	0	0.95	0.6
8	0.5937	1.22	5	0	0.78	0.6
9	0.8044	1.29	6	0	0.71	0.6
10	0.2219	1.79	6	0	0.21	0.6
11	0.5496	1.99	7	0	0.01	0.6
المجموع				0.25	6.55	

نلاحظ من خلال الجدول أن عدد الزبائن الواصلين إلى النظام خلال ساعتين (11) زبون واذا حسبنا زمن انتهاء الخدمة فسنجده كما يلي:

زمن انتهاء الخدمة t	الزبون
0.85	1
1.05	2
1.65	3
2.25	4

من خلال هذا الجدول نرى أن عدد متلقي الخدمة سيكون ثلاثة زبائن فقط لأن الزبون الرابع سيكون زمن انتهاء خدمته اكثر من ساعتين

من خلال نموذج المحاكاة هذا نستطيع حساب مؤشرات الفاعلية لهذا النظام كالآتي:

نسبة تعطل النظام عن العمل = $\frac{\sum V}{T} \times$ 100%

= $\frac{0.25}{2} \times$ 100% = 12.5%

متوسط وقت انتظار الزبون = $\frac{\sum W}{\text{عدد الزبائن } n}$

= $\frac{6.55}{4}$ = 0.59 ساعة

متوسط طول صف الانتظار = $\frac{\sum W}{1}$

= $\frac{6.55}{2}$ = 3.275 زبون

تطبيقات الحاسوب:

أما الحل باستخدام برنامج TORA للمثالين المحلولين في وحدة صفوف الانتظار باستخدام نفس البرنامج فتكون:

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

الأحد، سبتمبر ٢١، ٢٠٠٨ ١٢:٠١

QUEUEING OUTPUT ANALYSIS

Title: ex1
Scenario 1-- (M/M/1):(GD/infinity/infinity)

Lambda =	3.00000	Mu =	4.00000
Lambda eff =	3.00000	Rho/c =	0.75000
Ls =	3.00000	Lq =	2.25000
Ws =	1.00000	Wq =	0.75000

n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.25000	0.25000	18	0.00141	0.99577
1	0.18750	0.43750	19	0.00106	0.99683
2	0.14063	0.57813	20	0.00079	0.99762
3	0.10547	0.68359	21	0.00059	0.99822
4	0.07910	0.76270	22	0.00045	0.99866
5	0.05933	0.82202	23	0.00033	0.99900
6	0.04449	0.86652	24	0.00025	0.99925
7	0.03337	0.89989	25	0.00019	0.99944
8	0.02503	0.92492	26	0.00014	0.99958
9	0.01877	0.94369	27	0.00011	0.99968
10	0.01408	0.95776	28	0.00008	0.99976
11	0.01056	0.96832	29	0.00006	0.99982
12	0.00792	0.97624	30	0.00004	0.99987
13	0.00594	0.98218	31	0.00003	0.99990
14	0.00445	0.98664	32	0.00003	0.99992
15	0.00334	0.98998	33	0.00002	0.99994
16	0.00251	0.99248	34	0.00001	0.99996
17	0.00188	0.99436	35	0.00001	0.99997

TORA Optimization System, Windows®-version 1.00

الأحد، سبتمبر ٢١، ٢٠٠٨ ١٢:٠٣

QUEUEING OUTPUT ANALYSIS

Title: ex2
Scenario 1-- (M/M/2):(GD/infinity/infinity)

Lambda =	2.00000	Mu =	3.00000
Lambda eff =	2.00000	Rho/c =	0.33333
Ls =	0.75000	Lq =	0.08333
Ws =	0.37500	Wq =	0.04167

n	Probability, pn	Cumulative, Pn	n	Probability, pn	Cumulative, Pn
0	0.50000	0.50000	6	0.00137	0.99931
1	0.33333	0.83333	7	0.00046	0.99977
2	0.11111	0.94444	8	0.00015	0.99992
3	0.03704	0.98148	9	0.00005	0.99997
4	0.01235	0.99383	10	0.00002	0.99999
5	0.00412	0.99794			

تمارين

س(1) في شركة لصناعة التلفزيونات اذا كان حجم الطلب الاسبوعي وإحتماله معطاة في الجدول:

الطلب	الاحتمال
0	0.10
1	0.20
2	0.40
3	0.15
4	0.15

أما الوقت اللازم لاستلام الطلبية واحتماله فهو

الوقت اللازم	الاحتمال
1	0.20
2	0.55
3	0.25

المطلوب:

اعداد نموذج محاكاة لنظام المخزون لفترة (15) اسبوع باستخدام حجم الطلبية 4 وحدات، ونقطة اعادة الطلب ومدتان، وما هي عدد الوحدات التي سيخسرها اذا كان هناك طلب ولم تتوفر الاجهزة.

س(2) موزع لاحظ أن الطلب اليومي على سلعته يخضع لتغيرات احتمالية معينة، يطلب هذا الموزع كل يوم عدد معين من الوحدات بسعر ثابت ديناران للوحدة. وأن الوحدات المطلوبة تكون مسلمة وجاهزة للبيع في اليوم الثالث الذي يلي تاريخ عمل الطلبية. وأن

الموزع يتحمل كلفة تخزين بمعدل (0.2) دينار يومياً عن كل وحدة غير مباعة . واذا تجاوز الطلب حجم المخـزون المتاح فإن الفرق يكون مخزون سالب ويتحمل الموزع في هذه الحالة تكلفة عجز دينار واحد عن كل وحدة مؤجلة وفي لحظة استلام أية طلبية فهي تستخدم أولاً في تلبية الطلبات المؤجلة ومـن يسـتخدم البـاقي في تلبيـة الطلبـات الجارية.

لاحظ الموزع أن كمية الطلب تتبع قانون احتمال معلوم كما في الجدول

الطلب	0	1	2	3	4	5	6	7	المجموع
الاحتمال	0.06	0.09	0.11	0.17	0.20	0.16	0.13	0.08	1

المطلوب: بناء نموذج محاكاة لتحديد ما يلي:

1- المخزون في اللحظة t

2- كمية الطلب المثلى

3- حجم الطلبية في اللحظة t

4- متوسط إجمالي التكاليف

س(3) ABC شركة لصناعة قطع السيارات، ترغب في معرض كمية الانتاج التي ستنتجها من صنف معين، فإذا كـان تكلفة الوحدة الواحدة ديناران وتكلفة الطلبية الواحدة (50) دينار وحدة انتظار للطلبية (3) أيام ، وكانـت حجـم الطلبية اليومية واحتمالها معطى في الجدول

الطلب	2	3	4	5	6	المجموع
الاحتمال	0.10	0.30	0.30	0.20	0.1	1

اذا كان حجم المخزون الاولي (20) وحدة أوجـد نمـوذج المحاكـاة بفـترة عشرـة أيـام الـذي يعطـي التكلفـة الكليـة للمخزون وحجم الطلبية.

س(4) طبيب اسنان يحدد موعد لمرضاه كل (30) دقيقة ولكن بعض الزبائن يأخذون أقل أو أكثر من (30) دقيقـة حسب العمل الذي سيقوم به لهم، الجدول التالي يوضح كل عمل ممكن أن يقوم واحتمال وجوده

نمط الخدمة	الوقت اللازم بالدقيقة	الاحتمال
حشو	45	0.40
تلبيس	60	0.15
تنظيف	15	0.15
خلع	45	0.10
فحص	15	0.20

ابني نموذج محاكاة لاربع ساعات لهذه العيادة، واحسب متوسط وقت الانتظار للمريض، افترض أن جميع المـرضى سيصلون إلى العيادة ابتداءً من الساعة 8 صباحاً.

س(5) مركز خدمة به قناة خدمة واحدة، الجدول التالي يعطـي توزيـع وقـت الوصـول واحتمالـه ووقـت الخدمـة واحتمالها

وقت الوصول	احتماله	وقت الخدمة	احتماله
10	0.10	5	0.08
15	0.25	10	0.14
20	0.30	15	0.18
25	0.25	20	0.24
30	0.10	25	0.22
		30	0.14

يصل الزبائن إلى مركز الخدمة بشكل عشوائي الوقت الفاصل بين شخص وآخر يتراوح بين (10-30) دقيقة، ويبدأ تقدم الخدمة الساعة (10) صباحاً بواقع (8) ساعات يوميا، الواصلون يذهبون للخدمة مباشرة اذا كانت فارغة، وإلا سينتظرون في صف الانتظار اذا كان نظام الخدمة المعمول به (FCFS) من يأتي أولاً يخدم أولاً، اذا كانت تكلفة تقديم الخدمة (10) دنانير في الساعة، وانتظار الزبائن يكلف (15) دينار في الساعة، وانتظار الزبائن يكلف (15) دينار في الساعة، هل يكون اقتصادياً وضع مركز خدمة آخر. استخدم طريقة مونت كارلو في عمل نموذج محاكاة للإجابة على هذا السؤال.

س(6) مشروع يتكون من (8) أنشطة زمن كل نشاط مأخوذ عشوائياً، الجدول التالي يبين النشاط والنشاط السابق واحتمالات الزمن

النشاط	النشاط السابق	الوقت (يوم / احتمال)								
		1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	-	-	-	-	0.2	-	0.4	0.4	-	-
B	-	-	-	-	-	-	0.5	-	0.5	-
C	A	-	-	0.7	0.3	-	-	-	-	-
D	B , C	-	-	-	-	0.9	-	-	0.1	-
E	A	-	-	-	-	0.2	-	-	-	0.8
F	D , E	-	-	-	0.6	0.4	-	-	-	-
G	F	-	-	0.4	0.4	-	0.2	-	-	-
H	F , G	-	0.4	-	-	-	-	0.6	-	-

(مساعدة : نحسب الوقت المتوقع للنشاط بجمع حاصل ضرب الاحتمال بالارباح)

المطلوب :

1- ارسم شبكة الأعمال وإحسب المسار الحرج موضحاً عليه الوقت المتوقع للنشاط.

2- ابني نموذج محاكاة لحساب المسار الحرج وزمن الانجاز.

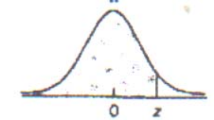
3- كرر النموذج أربع مرات ثم جد زمن الانجاز في كل مرة.

ملحــق

جدول الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65258	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21681	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	78547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75986
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
86181	78949	86601	46258	00477	25234	09903	36574	72139	70185
54308	21154	97810	86764	82869	11785	55261	59009	38714	38723
65541	34371	09591	07889	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05325
53298	90276	62545	21944	16580	03878	07516	95715	02526	33537

جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري



z	Second decimal place in z									
	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000									

المساحة إلى يسار 3.90 - z هي تقريباً صفر.

المراجع

المراجع العربية

اسم الكتاب	المؤلف	الطبعة، دار النشر، السنة
1- مقدمة في بحوث العمليات	فتحي حمدان، رشيق مرعي	الرابعة، دار وائل، 2004
2- بحوث العمليات، تطبيقات على الحاسوب	د. ماجدة التميمي، د. احمد الصغار	الأولى، دار المناهج، 2007
3- المدخل لبحوث العمليات	د. عبد الرسول الموسوي	الثانية، دار وائل، 2006
4- مقدمة في بحوث العمليات	د. محمد الطراونة، د. سليمان عبيدات	الأولى، 1989
5- مدخل إلى بحوث العمليات	د. لطيف الحكيم، د. عبد الجليل المنصور	الأولى، دار دمشق، 1987
6- بحوث العمليات	أ.د. لطفي سيفين	الاولى، دار الجامعات المصرية، 1977
7- الأساليب الكمية التطبيقية في إدارة الأعمال	د. عبد الحميد البلداوي، د. نجم الحميدي	الأولى، دار وائل، 2008

المراجع الأجنبية

Name of Books	Outher	Edition Publisher
1- Operations Research	Hamdy taha	8th, Pearson, 2007 Prentice Hall
2- Operations Research	J.K. Sharma	2nd, Macnildian, 2004
3- Introduction to Operations Research	Hillier, Lieber man	7th, McGraw- Hill
4- Operations Research	Paul A. Jensen & Jonathan F. Bard	John Wiley & Sons 2003
5- Linear Progrming	G. V. Shenog	Wiley Eastern Limited 1989
6- Problems in Operations Research	P.K. Gupta & D.S. Hira	S. Chad of Company 2000





تطلب منشوراتنا من

عمان:	مكتبة وائل - ش. الجمعية العلمية الملكية - مقابل بوابة الجامعة الأردنية الشمالي- هاتف : 5335837 6 962+ - فاكس : 5331661 6 962+ - ص.ب (1746) - الجبيهة
عمان:	دار وائل للنشر - وسط البلد - مجمع الفحيص التجاري - تلفاكس : 4627627 6 962+
عمان:	دار وائل للنشر - شارع الجمعية العلمية الملكية - مبنى الجامعة الأردنية الأستثماري الثاني- هاتف : 5338410 6 962+ فاكس : 5338413 6 962+
عمان:	مؤسسة تسنيم للنشر والتوزيع - مقابل كلية عمان الجامعية - تلفاكس: 96264641162+
الجزائر:	الدار الجامعية للكتاب- ولاية بو مرداس- هاتف: 21324872766+
بيروت:	دار الكتب العلمية تلفاكس : 804811 - 804810 5 961+ ص.ب (11 - 9424)
القاهرة:	دار الكتاب الحديث - 94 شارع عباس العقاد - هاتف : 992 52 27 202+
القاهرة:	مكتبة مدبولي: 6 ميدان طلعت حرب - وسط البلد - تلفاكس: 20225756421+
القاهرة:	دار طيبة للنشر والتوزيع 23 شارع الفريق محمد إبراهيم - مدينة نصر- القاهرة- هاتف: 20222725312+ فاكس: 20222725376+
الإسكندرية:	دار الفكر الجامعي-30 شاعر سوتر الازاريطة-هاتف:4843132-5903950-موبايل:010779823
الرياض:	مكتبة جرير. ليست مجرد مكتبة. المركز الرئيسي - هاتف : 14626000 966+ الرياض - شارع عاليا - شارع الأمير عبد الله - شارع عقبة بن نافع - وكافة فروعها جدة - مكة المكرمة - القسيم - الدمام - الإحساء - الدوحة - أبو ظبي - الكويت.
الرياض:	دار الزهراء للنشر والتوزيع- العليا- بين شارع العليا والضباب - هاتف: 4641144 1 966+ فاكس: 4659537 1 966+
جدة:	مكتبة كنوز المعرفة للمطبوعات والأدوات المكتبية- جدة - الشرقية - شارع الستين - هاتف : 6514222 - 6510421 - فاكس : 6570628
جدة:	دار حافظ للنشر والتوزيع - شارع الجامعة - هاتف : 96626892860+
جدة:	مكتبة خوارزم العلمية - حي الجامعة مقابل كلية الهندسة هاتف: 6817090 2 966+ - 6400709 2 966+ فاكس: 6818831 2 966+
بغداد:	مكتبة الذاكرة- الاعظمية- مجاور السفارة الهندية- هاتف:4257628 - تلفاكس : 4259987 - نقال : 7507561031 964+
الدوحة:	مكتبة جرير .. ليست مجرد مكتبة - طريق سلوى- تقاطع رمادا- هاتف: 4440212 974+
المنامة:	جامعة دلمون للعلوم والتكنولوجيا - شارع المعارض هاتف : 17295500 - 7294400 9731+
رام الله:	شركة جلاكسي لأنظمة المعلومات - هاتف : 2958444 02 97+
	الكويت - مكتبة دار ذات السلاسل - هاتف : 2466255 965+
طرابلس	ليبيا - دار الرواد - ذات العماد - برج (4) هاتف : 3350332 821 21+
غريان:	ليبيا - المكتبة الجامعية - تلفاكس : 630730 841 21+
الخرطوم:	دار الجنان للنشر والتوزيع - بري - حي الصفا - هاتف : 8064984 991 24+
انواكشوط :	موريتانيا- المكتبة التجارية الموريتانية الكبرى GRA.LI.CO-Ma هاتف: 5253009 222+ ص.ب (341) انواكشوط
دبي:	مكتبة دبي للتوزيع بكافة فروعها في الإمارات- هاتف:97143339998+-فاكس:97143337800
دمشق:	دار المنجد للنشر-دمشق-الجمارك-المزة-هاتف:963112135414+-فاكس:963112118277+

www.darwael.com E-mail:wael@darwael.com

ومن كافة دور النشر العربية والمكتبات في الوطن العربي

بحوث العمليات

مع تطبيقات باستخدام الحاسوب


9789957118013